centred Grassman's manifold is given by means of parallel displacements and mappings.

УДК 514.76

К.М. Буданов

(Пензенский государственный педагогический университет)

ЛИФТЫ ФУНКЦИЙ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В РАССЛОЕНИЕ ВЕЙЛЯ НАД АЛГЕБРОЙ ВЕЙЛЯ ВЫСОТЫ 2

Построены лифты функций и векторных полей в расслоение Вейля над алгеброй Вейля высоты 2.

1. Пусть **A** — алгебра Вейля — коммутативная, ассоциативная алгебра **A** с единицей, обладающая нильпотентным идеалом **I** таким, что факторалгебра **A/I** изоморфна алгебре действительных чисел **R**.

Наименьшее натуральное число r, удовлетворяющее условию $\mathbf{I}^{r+1} = 0$, называется высотой, а размерность факторалгебры $\mathbf{I}/\mathbf{I}^2$ — шириной алгебры Вейля **A** [1].

Пусть M_n — гладкое многообразие размерности n класса C^∞ и $C^\infty(M_n)$ — алгебра гладких вещественнозначных функций класса C^∞, заданных на M_n. Гомоморфизм j_p: $C^\infty(M_n)\to\mathbf{A}$ называют **A**-близкой точкой к точке $p\in M_n$, если имеет место сравнение $j_p(f) \equiv f(p)$ $(mod\ \mathbf{I})$ для всякой функции $f\in C^\infty(M_n)$.

Множество всех точек, **A**-близких к точке $p\in M_n$, обозначим через $(M_n)_p^{\mathbf{A}}$ и составим объединение $\bigcup\limits_{p\in M_n} (M_n)_p^A = M_n^A$. Определим каноническую проекцию $\pi : M_n^A \to M_n$ условием $\pi(j_p) = p$. На множестве M_n^A возникает гладкая структура, порождённая гладкой структурой многообразия M_n. Расслоение (M_n^A , π, M_n) называется расслоением Вейля порядка r.

Для каждой функции $f\in C^\infty(M_n)$ функция $f^{\mathbf{A}}$, удовлетво-ряющая условию $f^{\mathbf{A}}(j_p)$ = $j_p(f)$, называется **A**-продолжением функции f.

Пусть a^* — линейная форма, заданная на **A** и принимающая значения в **R**. Тогда $f_{(a^*)} = a^* \circ f^A$ — вещественнозначная функция на M_n^A . Для линейных форм ε_0, ε_α дуального базиса к базису $\{\varepsilon^0, \varepsilon^\alpha\}$ алгебры **A** будем использовать следующие обозначения: $f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)}, f_{(\varepsilon_\alpha)} = f_{(\alpha)}$, где $f_{(0)} = f \circ \pi$.

Пусть (U, x^i) — координатная окрестность на M_n. На множестве $\pi^{-1}(U) \subset M_n^A$ рассмотрим продолжения $(x^i)^{\mathbf{A}}$ координатных функций. Так как $(x^i)^{\mathbf{A}} = x_0^i + x_\alpha^i \varepsilon^\alpha$, то $(x^i)_{(0)} = x^i_0$, $(x^i)_{(\alpha)} = x^i_\alpha$. Функции x^i_0, x^i_α являются координатными функциями на $\pi^{-1}(U)$.

2. Если рассматривается расслоение Вейля порядка 2, то можно показать [2], что **A**-продолжение функции f имеет вид:

$$f^A = f_{(0)} + (\partial_i f)_{(0)} x^i_\alpha \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2}\left(\partial_{ij} f\right)_{(0)} x^i_\alpha x^j_\beta \gamma^{\alpha\beta}_\sigma \varepsilon^\sigma . \qquad (1)$$

Используя определение функций $f_{(\alpha)}$, получаем:

$$f_{(\alpha)} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_\alpha + \frac{1}{2}\left(\partial_{ij} f\right)_{(0)} x^i_\sigma x^j_\tau \gamma^{\sigma\tau}_\alpha . \qquad (2)$$

В формулах (1), (2) индексы $\alpha, \beta, \sigma, \tau = 1, 2, \ldots, N - 1$, где $N = \dim \mathbf{A}$.

Каждая линейная форма b^* и элемент a алгебры **A** порождают линейную форму $b^* \cdot a$, определяемую условием $b^* \cdot a(c) = b^*(ac)$ для всякого $c\in\mathbf{A}$. Обозначим $f_{(b^*\cdot a)} = f^{(a)}_{(b^*)}$. Если $b^* = \varepsilon_\beta$, $a = \varepsilon^\alpha$, то $f_{(\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon^\alpha)} = f^{(\varepsilon^\alpha)}_{(\varepsilon_\beta)} = f^{(\alpha)}_{(\beta)}$. Справедливо

Предложение [3]. Для функций *f*, $g\in C^{\infty}(M_n)$ имеют место равенства

$$f_{(\beta)}^{(0)} = f_{(\beta)}, \qquad f_{(0)}^{(\alpha)} = \delta_0^{\alpha} f_{(0)},$$
$$f_{(\beta)}^{(\alpha)} = \gamma_{\beta}^{\alpha\sigma} f_{(\sigma)}, \qquad (fg)_{(b^*)}^{(a)} = f_{(b^*)}^{(\sigma)} g_{(\sigma)}^{(a)}, \tag{3}$$

где $\gamma_{\beta}^{\alpha\sigma}$ — структурные константы алгебры **A**.

Отсюда можно получить формулу

$$(fg)_{(\alpha)} = (fg)_{(\alpha)}^{(0)} = f_{(\alpha)}^{(\sigma)} g_{(\sigma)}^{(0)} = \gamma_{\alpha}^{\sigma\tau} f_{(\tau)} g_{(\sigma)}. \tag{4}$$

3. Пусть (U, x^i) и $(V, \bar{x}^i)$ — координатные окрестности на M_n. Если $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)\neq\varnothing$ и координатные функции на $U\cap V$ связаны соотношениями $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, то на $\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V)$ координатные функции x^i_0, x^i_α и $\bar{x}^i_0, \bar{x}^i_\alpha$ будут связаны соотношениями

$$\bar{x}^i_0 = \bar{x}^i_0(x^1_0, \ldots, x^n_0),\ \bar{x}^i_\alpha = (\partial_j \bar{x}^i)_{(0)} x^j_\alpha + \frac{1}{2}\left(\partial_{jk}\bar{x}^i\right)_{(0)} x^j_\sigma x^k_\tau \gamma_\alpha^{\sigma\tau}. \tag{5}$$

4. Пусть *X* — векторное поле на M_n и *a* — элемент алгебры **A**. На M_n^A существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию $X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^*)}^{(a)}$ для любой функции *f* и линейной формы b^*. Если $a = \varepsilon^0$, то векторное поле $X^{(\varepsilon^0)} = X^{(0)}$ называется полным лифтом векторного поля *X*. Векторные поля $X^{(a)}$ при $a\in\mathbf{I}$ называют вертикальными. Можно показать, что

$$[X^{(a)}, Y^{(b)}] = [X, Y]^{(ab)}.$$

Если $a = \varepsilon^\alpha$, $b = \varepsilon^\beta$, то

$$[X^{(\alpha)}, Y^{(\beta)}] = [X, Y]^{(\alpha\beta)} = \gamma_\sigma^{\alpha\beta}[X, Y]^{(\sigma)}. \tag{6}$$

Можно также показать, что имеет место соотношение

$$(fX)^{(a)} = f^{(a)}_{(\tau)} X^{(\tau)}. \tag{7}$$

Отсюда, если $X = X^i \partial_i$, то $(X^i \partial_i)^{(\alpha)} = (X^i)^{(\alpha)}_{(\tau)} (\partial_i)^{(\tau)}$, $(\partial_i)^{(\alpha)} = \dfrac{\partial}{\partial x^i_\alpha} = \partial^\alpha_i$. Тогда

$$X^{(\alpha)} = (X^i)^{(\alpha)}_{(\tau)} \partial^\tau_i = \gamma^{\alpha\sigma}_\tau (X^i)_{(\sigma)} \partial^\tau_i. \tag{8}$$

Также можно получить формулу

$$X^{(\alpha)} f_{(\beta)} = (Xf)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \gamma^{\alpha\sigma}_\beta (Xf)_{(\sigma)}. \tag{9}$$

5. Рассмотрим алгебру Вейля **A** ширины 2 и высоты 2, базис которой имеет вид $\{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$, где $\varepsilon^1\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^1\varepsilon^3 = 0$, $\varepsilon^2\varepsilon^2 = q\varepsilon^3$, $q = \pm 1$. Используя структурные константы алгебры **A**, можно записать:

$\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = \gamma^{\alpha\beta}_\sigma \varepsilon^\sigma$, где $\alpha, \beta, \sigma = 0, 1, 2, 3$.

Ненулевые структурные константы данной алгебры имеют вид:

$$\gamma^{00}_0 = 1,\ \gamma^{01}_1 = \gamma^{10}_1 = 1,\ \gamma^{02}_2 = \gamma^{20}_2 = 1,$$

$$\gamma^{03}_3 = \gamma^{30}_3 = 1,\ \gamma^{11}_3 = 1,\ \gamma^{22}_3 = q. \tag{10}$$

Тогда лифты функций (2) имеют вид:

$$f_{(1)} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_1, \qquad f_{(2)} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_2,$$
$$f_{(3)} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_1 + \frac{1}{2} (\partial_{ij} f)_{(0)} (x^i_1 x^j_1 + q x^i_2 x^j_2). \tag{11}$$

Закон преобразований координатных функций (5) имеет вид:

$$\overline{x}_0^i = \overline{x}_0^i(x_0^1,...,x_0^n),\ \overline{x}_1^i = (\partial_j \overline{x}_1^i)_{(0)} x_1^j,\ \overline{x}_2^i = (\partial_j \overline{x}_2^i)_{(0)} x_2^j,$$
$$\overline{x}_3^i = (\partial_j \overline{x}_3^i)_{(0)} x_1^i + \frac{1}{2}(\partial_{jk} \overline{x}_3^i)_{(0)} (x_1^j x_1^k + q x_2^j x_2^k). \tag{12}$$

Используя формулу (4), можно получить действие лифтов функций на произведение функций:

$$\begin{aligned} &(fg)_{(0)} = f_{(0)} g_{(0)}, \quad (fg)_{(1)} = f_{(0)} g_{(1)} + f_{(1)} g_{(0)}, \\ &(fg)_{(2)} = f_{(0)} g_{(2)} + f_{(2)} g_{(0)}, \\ &(fg)_{(3)} = f_{(0)} g_{(3)} + f_{(1)} g_{(1)} + q f_{(2)} g_{(2)} + f_{(3)} g_{(0)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Лифты векторных полей (8) имеют выражение:

$$\begin{aligned} &X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (X^i)_{(1)} \partial_i^1 + (X^i)_{(2)} \partial_i^2 + (X^i)_{(3)} \partial_i^3, \\ &X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1 + (X^i)_{(1)} \partial_i^3, \\ &X^{(2)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^2 + q (X^i)_{(2)} \partial_i^3, \quad X^{(3)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^3 \end{aligned} \tag{14}$$

Формула (9), выражающая действие лифтов векторных полей на лифты функций, примет вид:

$$\begin{aligned} &X^{(0)} f_{(\alpha)} = (Xf)_{(\alpha)}, \ \alpha = 0,1,2,3; \\ &X^{(1)} f_{(1)} = (Xf)_{(0)}, \quad X^{(1)} f_{(3)} = (Xf)_{(1)}; \\ &X^{(2)} f_{(2)} = (Xf)_{(0)}, \quad X^{(2)} f_{(3)} = q(Xf)_{(2)}; \\ &X^{(3)} f_{(3)} = (Xf)_{(0)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Все остальные выражения равны нулю.

Коммутаторы векторных полей (6) имеют вид:

$$\begin{aligned} &[X^{(0)}, Y^{(\alpha)}] = [X,Y]^{(\alpha)}, \alpha = 0,1,2,3; [X^{(1)}, Y^{(0)}] = [X,Y]^{(1)}; \\ &[X^{(1)}, Y^{(1)}] = [X,Y]^{(3)};\ [X^{(2)}, Y^{(0)}] = [X,Y]^{(2)}; \\ &[X^{(2)}, Y^{(2)}] = q[X,Y]^{(3)};\ [X^{(3)}, Y^{(0)}] = [X,Y]^{(3)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Все остальные выражения равны нулю.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

2. *Султанов А.Я.* Горизонтальные лифты линейных связностей на расслоениях Вейля второго порядка // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 133—140.

3. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Математика. 1999. №9. С. 81—90.

K. Budanov

LIFTS OF FUNCTIONS AND VECTOR FIELDS ON WEIL BUNDLE OVER WEIL ALGEBRA OF HEIGHT 2

Lifts of functions and vector fields on Weil bundle over Weil algebra of height 2 are constructed.

УДК 514.76

К.М. Буданов, А.В. Воеводин

(Пензенский государственный педагогический университет)

О ФРОБЕНИУСОВЫХ АЛГЕБРАХ ВЕЙЛЯ ШИРИНЫ 2

Доказано существование фробениусовых алгебр Вейля ширины 2.

Пусть **A** — алгебра Вейля — коммутативная, ассоциативная алгебра **A** с единицей, обладающая нильпотентным идеалом **I** таким, что факторалгебра **A**/**I** изоморфна алгебре действительных чисел **R**.

Наименьшее натуральное число r, удовлетворяющее условию $\mathbf{I}^{r+1} = 0$, называется высотой, а размерность факторалгебры $\mathbf{I}/\mathbf{I}^2$ — шириной алгебры Вейля **A**. Алгебра **A** как векторное