УДК 512.81

В. Б. Цыренова[1]
[1] *Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Россия*
v.ts@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-14

Линии на поверхности в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$

Квазигиперболические пространства являются проективными пространствами с распадающимся абсолютом. Данная работа продолжает работу [7], в которой рассмотрены поверхности в одном из этих пространств методами внешних форм и подвижного репера. Изучены получебышевские и чебышевские сети линий на поверхности в пространстве ${}^{11}S_3^1$.

Доказаны три теоремы. В теореме 1 получено натуральное уравнение негеодезических линий, входящих в сопряженную получебышевскую сеть на поверхности так, что вдоль них параллельно переносятся касательные к линиям другого семейства. В теореме 2 получено натуральное уравнение негеодезических линий, входящих в чебышевскую сеть. В теореме 3 доказано, что сопряженные чебышевские сети, одно семейство которых не является ни геодезическими линиями, ни евклидовыми сечениями, имеются на поверхностях с произволом четырех функций одного аргумента.

Ключевые слова: квазигиперболическое пространство, абсолют, поверхность, канонический репер, инварианты, линии на поверхности, геодезические линии, получебышевские и чебышевские сети.

Поступила в редакцию 26.04.2020 г.

Введение

Квазиэллиптическое и квазигиперболические пространства изучались многими учениками Б. А. Розенфельда и Р. Н. Щербакова (напр., [3; 4]). Во всех указанных пространствах нами изучены линейчатые поверхности и конгруэнции, построены и геометрически характеризованы их канонические реперы, получены геометрические характеристики инвариантов и простейшие классы.

В данной работе продолжим рассмотрение поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$, сетей линий на поверхности.

1. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$

Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$ — это проективное 3-пространство, в котором метрика определяется абсолютом, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

Будем пользоваться такой системой координат, в которой абсолютные плоскости q_1, q_2, абсолютная прямая T_0 и абсолютные точки на ней Q_1, Q_2 имеют соответственно уравнения

$$(X,X)_1 = (x^0)^2 + 2x^0x^1 = 0,\ x^0 = x^1 = 0,$$

$$(X,X)_2 = (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Абсолютные плоскости пространства ${}^{11}S_3^1$ разбивают многообразие точек проективного пространства, не принадлежащих абсолюту, на две связные области. Мы рассматриваем ту область, для точек которой $(X,X)_1 > 0$, а их координаты и координаты точек абсолютной прямой будем нормировать соответственно условиям $(X,X)_1 = 1$ и $(X,X)_2 = 1$.

Расстояния δ_0, d и δ_1 между точками X и $У$ с нормированными координатами гиперболической, абсолютной и евклидовой прямых находятся по формулам

$$ch\delta_0 = (X,У)_1, ch\delta_1 = (X,У)_2,\ d^2 = (X,У)_2.$$

Деривационные формулы наиболее общего репера пространства ${}^{11}S_3^1$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&dA_0 = \omega_0^0(A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3,\\
&dA_1 = -\omega_0^0 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3,\\
&dA_2 = \omega_2^3 A_3, dA_3 = \omega_2^3 A_2.
\end{aligned}$$

2. Поверхности в пространстве ${}^{11}S_3^1$

В работе [7] автором был построен полуканонический и два канонических репера поверхности. При этом поверхность задается параметрическим уравнением $A = A(u^1, u^2)$. Точка поверхности и касательная плоскость (а следовательно, и нормаль) включены в репер в качестве точки A_0 и плоскости $(A_0 A_1 A_2)$. Деривационные формулы полуканонического репера поверхности получены в виде

$$\begin{aligned}
&dA_0 = \omega_0^0 A_0 - \omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2,\\
&dA_1 = -\omega_0^0 A_1 + (\mu\omega_0^0 + \nu\omega_0^2)A_2 + (\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2)A_3,\\
&dA_2 = (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2)A_3,\\
&dA_3 = (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2)A_3.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Для базисных форм ω_0^0 и ω_0^2 имеем $D\omega_0^0 = 0$, $D\omega_0^2 = (1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2$, а основная система дифференциальных уравнений [7] имеет вид

$$d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 = (\gamma\mu + \beta(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2;$$
$$d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 = \gamma(1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \qquad (2.2)$$
$$d\mu \wedge \omega_0^0 + d\nu \wedge \omega_0^2 = (\nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2.$$

Решение этой системы существует с произволом в две функции двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности, отнесенной к произвольному семейству линий [7].

Полную систему инвариантов поверхности образуют инварианты $\gamma, I = \beta^2 + 2\alpha\gamma$ и значения μ и ν при какой-либо канонизации репера.

При $\alpha = 0, \beta \neq 0$ и $\beta = 0, \alpha \neq 0$ получаются канонические реперы R_1 и R_2.

Полную систему инвариантов линии $\omega_0^2 = 0$ на поверхности составляют значения коэффициентов $\alpha, \beta, \mu,$ вычисленных вдоль этой линии. Линии $\omega_0^0 = 0$ высекаются на поверхности евклидовыми плоскостями и называются евклидовыми сечениями [5]. В [4] они названы изотропными линиями кривизны.

На поверхности определены две первые квадратичные формы:

$$\varphi_1 = (dA_0, dA_0)_1 = -(\omega_0^0)^2; \varphi_1^{'} = (dA_0, dA_0)_2 = (\omega_0^2)^2.$$

Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\varphi_2 = (d^2A_0, A_0, A_1, A_2) = -\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2.$$

Геометрическое значение второй квадратичной формы получается из соотношения $\varphi_2 = \pm 2\delta$, где δ — расстояние между точками A_0 и $B = pr^{A_3}_{A_0A_1A_2}(A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2A_0 + [3])$.

Уравнения торсов конгруэнции $\{A_0A_3\}$ нормалей поверхности имеют вид $\omega_0^0 = 0$ и $\beta\omega_0^0 - \gamma\omega_0^2 = 0$, фокусами образующих являются точки $F_1 = A_0 + \frac{1}{\gamma} A_3$ и $F_2 = A_3$, это означает, что одна из эволют вырождается в абсолютную прямую.

Инвариант $a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ называют нормальной кривизной линии $\omega_0^0 : \omega_0^2$ на поверхности [7]. Для линии $\omega_0^0 = 0$ форма $\varphi_1 = 0$, а нормальная кривизна $a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1^{'}} = \gamma$.

Поверхности $\nu = 0$ характеризуются тем, что евклидово сечение $\omega_0^0 = 0$ является горловой линией регулюса $\{A_0 A_1\}$ касательных к асимптотической линии $\omega_0^2 = 0$ и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

3. Линии на поверхности

Полагая $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^0 = ds, \mu = m, \alpha = a, \beta = b$, получим деривационные формулы канонического репера линии на поверхности:

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + mA_2 + aA_3, \frac{dA_2}{ds} = -bA_3, \frac{dA_3}{ds} = -bA_2 .$$

Формулы Френе пространственной кривой можно получить в виде

$$\frac{dA_0}{ds} = A_0 - A_1, \frac{dA_1}{ds} = -A_1 + kA_2, \frac{dA_2}{ds} = \kappa A_3, \frac{dA_3}{ds} = \kappa A_2 .$$

Сравнивая эти формулы, видим, что s есть длина дуги линии на поверхности, а для кривизн k^*, κ^* линии на поверхности получаем $(k^*)^2 = a^2 + m^2, \kappa^* = -b$. Из деривационных формул канонического репера линии на поверхности получаются вычислительные формулы для инвариантов линии на поверхности:

$$a = \left(-\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2\right) : (\omega_0^0)^2,$$
$$b = (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2) : \omega_0^0,$$
$$m = (\mu\omega_0^0 + (1-\nu)\omega_0^2) : \omega_0^0 - (\omega_0^0 d\omega_0^2 - \omega_0^2 d\omega_0^0) : (\omega_0^0)^3$$

Видим отсюда, что только инвариант m является инвариантом второго порядка.

Нами выделены следующие три основных класса линий на поверхности:

1) $a = 0$ — асимптотические линии, для них репер совпадает с каноническим репером R_1, а также может служить каноническим репером пространственной кривой, рассматриваемой независимо от поверхности;

2) $b = 0$ — конические линии (конусы, описываемые касательными к этим линиям, имеют вершины на абсолютной прямой); нормаль A_0A_3 также описывает такой конус;

3) $m = 0$ — квазигиперболические геодезические линии с гиперболическими касательными.

4. Получебышевские и чебышевские сети линий на поверхности

В нашем репере $(A_0A_1A_2)$ — касательная плоскость к поверхности (A_0) в точке A_0. Будем говорить [6], что гиперболическая прямая (A_0M), $M = A_1 + xA_2$ «переносится параллельно» вдоль некоторой линии $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$ на поверхности, если вдоль этой линии $((dM)^*, A_0, M) = 0$, где точка $\dfrac{M+(dM)^*}{\sqrt{1+(\omega_0^0)^2}}$

есть проекция точки $\frac{M+(dM)}{\sqrt{1+(\omega_0^0)^2}}$ из несобственной точки A_3 квазигиперболической нормали на касательную плоскость $(A_0 A_1 A_2)$, причем дифференциал dM здесь находится вдоль линии $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$.

Пусть $(A_0 A_1 A_2)$ — касательная плоскость к поверхности в точке A_0. Будем говорить, что гиперболическая прямая $(A_0 M)$, где $M = A_1 + xA_2$, «переносится параллельно» вдоль некоторой линии $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$ на поверхности, если вдоль этой линии

$$((dM)^*, A_0, M) = 0, \tag{4.1}$$

где точка $M+(dM)^*$ является проекцией точки $M + (dM)_{y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0}$ из несобственной точки A_3 квазигиперболической нормали на плоскость $(A_0 A_1 A_2)$.

Условие (4.1) для линий $y\omega_0^0 + z\omega_0^2 = 0$ имеет вид

$$dx + x\omega_0^0 + \frac{\mu z - \nu y}{z}\omega_0^0 = 0. \tag{4.2}$$

Если переносится прямая $(A_0 A_1)$, то равенство (4.2) в терминах любого из наших реперов дает

$$\mu z = \nu y. \tag{4.3}$$

Теперь, учитывая, что $dx = x_1\omega_0^0 + x_2\omega_0^2$, получаем условие (4.2) параллельного перенесения прямой $(A_0 M)$ вдоль линии семейства $\omega_0^2 = 0$ в виде

$$x + \mu + x_1 = 0. \tag{4.4}$$

Если прямая (A_0M) переносится вдоль геодезической линии, то (4.4) имеет вид $x + x_1 = 0$. При этом вдоль них касательные к геодезическим переносятся параллельно.

В работе [6] по аналогии с евклидовой геометрией получебышевской сетью линий на поверхности называется сеть, у которой касательные к линиям одного семейства переносятся параллельно вдоль линий другого семейства, а сеть, у которой касательные к линиям каждого семейства переносятся параллельно вдоль линий другого семейства, называется чебышевской.

Если семейство негеодезических линий $\omega_0^2 = 0$ включено в получебышевскую сеть так, что касательные (A_0A_1) к его линиям переносятся параллельно, то второе семейство в силу (4.3) имеет уравнение

$$\mu\omega_0^0 + \nu\omega_0^2 = 0\,. \tag{4.5}$$

При $\nu = 0$ касательные к негеодезическим линиям переносятся параллельно вдоль евклидовых сечений.

Если же семейство $\omega_0^2 = 0$ включено в получебышевскую сеть так, что вдоль его линий параллельно переносятся линии другого семейства, то уравнение последнего можно записать в виде

$$\omega_0^0 + q\omega_0^2 = 0\,, \tag{4.6}$$

При этом функция q удовлетворяет уравнению

$$q_1 = \mu q^2 - q\,. \tag{4.7}$$

Теорема 4.1. *Линии семейства $\omega_0^2 = 0$, входящие в сопряженную получебышевскую сеть так, что вдоль них параллельно переносятся касательные к линиям другого семейства, имеют натуральное уравнение*

$$a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds} = mb^2 - ab\,.$$

Доказательство. Получебышевская сеть линий на поверхности $\omega_0^2(\overset{*}{\omega}{}_0^0 + q\overset{*}{\omega}{}_0^2) = 0$ будет сопряженной, если $q = \dfrac{\beta}{\alpha}$, так как уравнение сопряженной сети имеет вид

$$\omega_0^2(\alpha\overset{*}{\omega}{}_0^0 + \beta\overset{*}{\omega}{}_0^2) = 0\,.$$

Тогда условие (4.7) дает искомое натуральное уравнение.

Теорема 4.2. *Если семейство негеодезических линий* $\omega_0^2 = 0$ *можно включить в чебышевскую сеть, то*

$$\mu\nu^2 - \mu\nu_1 + \nu\mu_1 - \mu\nu = 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Искомое соотношение получается из (4.5), (4.6) и (4.7). Этих семейств на поверхности имеется бесчисленное множество.

Теорема 4.3. *Если семейство линий* $\omega_0^2 = 0$*, не являющихся ни геодезическими линями, ни линиями* $\nu = 0$*, можно включить в сопряженную чебышевскую сеть, то*

$$\alpha\nu - \beta\mu = \mu\nu^2 - \mu\nu_1 + \nu\mu_1 - \mu\nu = 0. \tag{4.9}$$

Такие сети имеются на поверхностях, определяемых с произволом четырех функций одного аргумента.

Доказательство. Объединяя условие сопряженности сети с условием теоремы 4.2, получаем соотношение (4.9).

Присоединяя эти соотношения, а также замыкания равенств $d\mu = \mu_1\omega_0^0 + \mu_2\omega_0^2, d\nu = \nu_1\omega_0^0 + \nu_2\omega_0^2$ к основной системе (2.2), получаем систему, состоящую из внешних уравнений

$$\begin{gathered}
d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 = (\gamma\mu + \beta(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2;\\
d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 = \gamma(1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2;\\
d\mu_1 \wedge \omega_0^0 + d\mu_2 \wedge \omega_0^2 = \mu_2(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2;\\
d\nu_1 \wedge \omega_0^0 + d\nu_2 \wedge \omega_0^2 = \nu_2(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2
\end{gathered} \tag{4.10}$$

и следующих трех конечных соотношений:

$$\alpha\nu - \beta\mu = 0, \mu\nu^2 + \nu\mu_1 - \mu\nu_1 - \mu\nu = 0,$$
$$\nu_1 - \mu_2 = \nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2.$$

Обозначив здесь и далее буквами Q_i выражения, не имеющие значения для определения произвола решения системы, из этих конечных соотношений при $\mu\nu \neq 0$ находим

$$d\alpha = \frac{\mu}{\nu} d\beta + Q_1\omega_0^0 + Q_2\omega_0^2;$$

$$d\nu_1 = \frac{\nu}{\mu} d\mu_1 + Q_3\omega_0^0 + Q_4\omega_0^2;$$

$$d\mu_2 = \frac{\nu}{\mu} d\mu_1 + \frac{\gamma\mu + 2\beta\nu}{\nu} d\beta + \alpha d\gamma + Q_5\omega_0^0 + Q_6\omega_0^2.$$

Подставив полученные значения дифференциалов в систему (4.10), получаем стандартную систему внешних дифференциальных уравнений

$$\mu d\beta \wedge \omega_0^0 + \nu d\beta \wedge \omega_0^2 = Q_7\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$
$$d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 = \gamma(1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$
$$d\mu_1 \wedge \omega_0^0 + (\frac{\nu}{\mu} d\mu_1 + \frac{\gamma\mu + 2\beta\nu}{\nu} d\beta + \alpha d\gamma) \wedge \omega_0^2 = Q_8\omega_0^0 \wedge \omega_0^2,$$
$$\frac{\nu}{\mu} d\mu_1 \wedge \omega_0^0 + d\nu_2 \wedge \omega_0^2 = Q_8\omega_0^0 \wedge \omega_0^2$$

со старшим характером $s_1 = 4$. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М., 1969.
2. *Щербаков Р. Н.* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.

3. *Гурьева В.П., Абдурахманова Х.К.* К теории поверхностей в трехмерных квазиэллиптическом и квазигиперболических пространствах // Геом. сб. [Вып.] 17. Томск, 1976. С. 132—139.

4. *Слободской В.И.* Теория поверхностей в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{10}S_3^1$ // Геом. сб. [Вып.] 21. Томск, 1980. С. 55—67.

5. *Цыренова В.Б., Щербаков Р.Н.* Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства // Геом. сб. [Вып.] 15. Томск, 1975. С. 183—204.

6. *Цыренова В.Б.* К теории поверхностей в квазиэллиптическом пространстве. // Геом. сб. [Вып.] 19. Томск, 1978. С. 96—108.

7. *Цыренова В.Б.* Поверхности в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$ // Геометрия многообразий и ее приложения : матер. V науч. конф. с междунар. участием, посвященной 100-летию профессора Р.Н. Щербакова. Улан-Удэ, 2018. С. 56—60.

V.B. Tsyrenova[1]

[1] Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude, Russia, 670000
v.ts@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-14

Lines on the surface in the quasi-hiperbolic space ${}^{11}S_3^1$

Submitted on April 26, 2020

Quasi-hyperbolic spaces are projective spaces with decaying absolute. This work is a continuation of the author's work [7], in which surfaces in one of these spaces are examined by methods of external forms and a moving frame. The semi-Chebyshev and Chebyshev networks of lines on the surface in quasi-hyperbolic space ${}^{11}S_3^1$ are considered. In this paper we use the definition of parallel transfer adopted in [6]. By analogy with Euclidean geometry, the semi-Chebyshev network of lines on the surface is the network in which the tangents to the lines of one family are carried parallel along the lines of another family. A Chebyshev network is a network in which tangents to the lines of each family are carried parallel along the lines of another family.

We proved three theorems. In Theorem 1, we obtain a natural equation for non-geodesic lines that are part of a conjugate semi-Chebyshev network on the surface so that tangents to lines of another family are transferred in parallel along them. In Theorem 2, the natural equation of non-geodesic lines in the Chebyshev network is obtained. In Theorem 3 we prove that conjugate Chebyshev networks, one family of which is neither geodesic lines, nor Euclidean sections, exist on surfaces with the latitude of four functions of one argument.

Keywords: quasi-hyperbolic space, absolute, surface, canonical frame, invariants, lines on the surface, geodesic lines, semi-Chebyshev and Chebyshev networks.

References

1. *Rosenfeld, B.A.:* Non-Euclidean spaces. Moscow (1969).

2. *Scherbakov, R.N.:* Course of affine and projective differential geometry. Tomsk (1960).

3. *Guryeva, V.P., Abdurakhmanova, Kh. K.:* On the theory of surfaces in three-dimensional quasi-elliptic and quasi-hyperbolic spaces. Geom. Sb. Tomsk. 17, 132—139 (1976).

4. *Slobodskoy, V.I.:* The theory of surfaces in three-dimensional quasi-hyperbolic space. Geom. Sb. Tomsk. 21, 55—67 (1980).

5. *Tsyrenova, V.B., Scherbakov, R.N.:* Fundamentals of the theory of surfaces of three-dimensional quasielliptic space. Geom. Sb. Tomsk. 15, 183—204 (1975).

6. *Tsyrenova, V.B.:* On the theory of surfaces in quasielliptic space. Geom. Sb. Tomsk. 19, 96—108 (1978).

7. *Tsyrenova, V.B.:* Surfaces in quasi-hyperbolic space ${}^{11}S_3^1$. Geometry of manifolds and its applications: materials of the Fifth Scientific Conference. Ulan-Ude. 56—60 (2018).