УДК 513.82

Л.В. Степанова, Т.Л. Мелехина

(Военный университет ВПВО ВС РФ, г. Смоленск;
Финансовая академия при правительстве РФ, г. Москва)

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Получены структурные уравнения Картана произвольной почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова (АН-) многообразия.

1. Пусть $(M^{2n}, J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — почти эрмитово многообразие [1], а $N \subset M^{2n}$ — его ориентируемая гиперповерхность. Обозначим через $\aleph_N(M)$ сужение модуля векторных полей $\aleph(M)$ на N: $\aleph_N(M) = \bigcup\limits_{p \in N} T_p(M)$. Очевидно, что $\aleph(N) \subset \aleph_N(M)$.

Пусть $\aleph^{\perp}(N)$ — ортогональное дополнение $\aleph(N)$ в $\aleph_N(M)$. Очевидно, что $\aleph^{\perp}(N)$ — одномерный подмодуль модуля $\aleph_N(M)$. При этом если $p \in N$ — произвольная точка, то

$$T_p^{\perp}(N) = \left\{X \in T_p(M) \,\middle|\, \langle X, Y\rangle = 0\,,\, Y \in T_p(N)\right\},\ \dim\left(T_p^{\perp}(N)\right) = 1\,.$$

Следовательно, вектор единичной нормали к N в точке p $n_0 \in T_p(M)$ может служить базисом подпространства $T_p^{\perp}(N)$, а значит, векторное поле

$$\left\{(n_0)_p \,\middle|\, p \in N\right\} \in \aleph_N(M)$$

может служить базисом подмодуля $\aleph^{\perp}(N)$.

Введем обозначение $\xi = J(n_0)$. Тогда $\xi \in \aleph(N)$, так как

$$\langle \xi, n_0 \rangle = \langle J(n_0), n_0 \rangle = -\Omega(n_0, n_0) = 0 ,$$

а значит, $\xi \perp n_0$ и согласно определению [1] $\xi \in \aleph(N)$. Введем обозначения $\eta \in \aleph^*{}_N(M)$, $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$ и $\zeta \in \aleph^*{}_N(M)$, $\zeta(X) = \langle n_0, X \rangle$. Имеем

$$\eta(X) = \langle \xi, X \rangle = \langle J(n_0), X \rangle = -\langle n_0, JX \rangle = -\zeta \circ J(X) ,$$

т.е. $\eta = -\zeta \circ J$. Таким образом, возникают несколько проекторов в модуле векторных полей $\aleph_N(M)$, а именно

- $\overline{n_1} = \zeta \otimes n_0$ — проектор на вектор одномерной нормали;
- $\Pi_1 = id - \overline{n_1}$ — дополнительный проектор на подмодуль $\aleph(N)$;
- $\overline{n_2} = \eta \otimes \xi$, $\Pi_2 = id - \overline{n_2}$.

Обозначим $\mathrm{Im}\,(\overline{n_2}) = \Psi$. Рассмотрим новые проекторы:

$$\overline{n_3} = \overline{n_1} + \overline{n_2} \,,\; \Pi_3 = id - \overline{n_3} \,.$$

Заметим, что образы проекторов $\overline{n_3}$ и Π_3 взаимно ортогональны, следовательно,

$$\aleph_N(M) = \mathrm{Im}\,(n_3) + \mathrm{Im}\,(\Pi_3) .$$

Обозначим $\mathrm{Im}\,(\Pi_3) = \Lambda$. Получим, что $\Psi = \Lambda(\xi) \subset \aleph(N)$, причем $\aleph(N) = \Lambda \oplus \Psi$ — прямая ортогональная сумма. Так как

$$\aleph_N(M) = \mathrm{Im}\,(n_3) + \mathrm{Im}\,(\Pi_3) =$$
$$= \Lambda \oplus \Lambda(\xi, n_0) = \Lambda \oplus \Lambda(\xi) \oplus \Lambda(n_0) = \Lambda \oplus \Psi \oplus \Lambda(n_0) ,$$

то $\Lambda \oplus \Psi = \Lambda^{\perp}(n_0) = \aleph(N)$. Заметим также, что поскольку $\Lambda(\xi, n_0)$ инвариантно относительно J , то и ортогональное дополнение Λ также инвариантно относительно J .

Определим эндоморфизм Φ модуля $\aleph_N(M)$ следующей формулой: $\Phi = J \circ \Pi_3$. Заметим, что Λ и Ψ, являясь инвариантными относительно J и Π_3, будут инвариантны и относительно Φ.

Непосредственно вычисляя $\Phi^2(X)$, $X \in \aleph_N(M)$, получим

$$\Phi^2 = -id + \zeta \otimes n_0 + \eta \otimes \xi .$$

В частности, если $X \in \aleph(N)$, то $\zeta(X) = \langle n_0, X \rangle = 0$ и, значит,

$$\Phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi , \quad X \in \aleph(N) .$$

Таким образом, сужение Φ на $\aleph(N)$ удовлетворяет условию $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$.

Итак, в модуле $\aleph(N)$ внутренним образом определены тензоры ξ, η, Φ, g, где

$$\xi = J(n_0) \; ; \; \eta(X) = \langle \xi, X \rangle ; \; \Phi = J \circ \Pi_3 \big|_{\aleph(N)} ; \; g = \langle \cdot,\cdot \rangle \big|_{\aleph(N)} .$$

При этом выполняются следующие условия:

1) $\eta(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle = 1$; 2) $\eta \circ \Phi = \eta \circ J \circ \Pi_3 \big|_{\aleph(N)} = 0$; 3) $\Phi(\xi) = 0$;

4) $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$; 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in \aleph(N)$.

Таким образом, доказано

Предложение. *На любой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия внутренним образом индуцируется почти контактная метрическая структура.*

Этот факт, по-видимому, впервые был установлен Сасаки [2], исходившим из других соображений.

2. Получим структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры, индуцированной на гиперповерхности N почти эрмитова многообразия. Зафиксируем точку $p \in N$ и построим два базиса пространства $T_p^C(M)$ — комплексификации пространства, касательного к многообразию M в точке p:

$$b_1 = (\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{n}}), \; b_2 = (\varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{b}}, e_n, e_{\hat{n}}) .$$

Здесь и далее $e_{\hat{n}}$ есть вектор нормали к N, $e_n = J(e_{\hat{n}}) = \xi_p$; $a,b,c,d = 1,\ldots,n-1$; $\hat{a} = a+n$; $\hat{n} = 2n$.

Если $(e_1,\ldots,e_n, Je_1,\ldots,Je_n)$ — ортонормированный базис пространства $T_p^{\,C}(M)$, вещественно адаптированный структуре J, то

$$\varepsilon_a = \frac{e_a - i\,Je_a}{\sqrt{2}},\ \ \varepsilon_{\hat{a}} = \frac{e_a + i\,Je_a}{\sqrt{2}},\ \ \varepsilon_n = \frac{e_n - i\,Je_n}{\sqrt{2}},\ \ \varepsilon_{\hat{n}} = \frac{e_n + i\,Je_n}{\sqrt{2}}.$$

Матрица перехода от базиса b_2 к базису b_1 имеет следующий вид:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} I_{2n-2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{array}\right),$$

где I_{2n-2} — единичная матрица порядка $2n-2$. Тогда обратная к ней матрица имеет вид

$$C^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} I_{2n-2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{array}\right).$$

Пусть (ω^i) и (θ^j) — базисы, дуальные к базисам b_2 и b_1 соответственно; $i,j = 1,\ldots,2n$. Тогда $\omega^i = \widetilde{C}^i_j\,\theta^j$, где $(\widetilde{C}^i_j) = C^{-1}$. Следовательно,

$$\omega^\gamma = \theta^\gamma,\ \ \omega^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^n + i\,\theta^{\hat{n}}),\ \ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^n - i\,\theta^{\hat{n}}),$$

где $\omega_n = \omega^{\hat{n}}$, $\gamma,\kappa = 1,\ldots,n-1,\ n+1,\ldots,2n-1$. Выразим θ^j:

$$\theta^\gamma = \omega^\gamma,\ \ \theta^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^n + \omega_n),\ \ \theta^{\hat{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^n - \omega_n).$$

Как реперы типа (p,b_1), так и реперы типа (p,b_2), где $p \in N$, образуют пространства G-структуры Y_m $(m = 1,2)$ со структурной группой $G = U(n-1) \times \{e\}$.

Первые группы структурных уравнений римановой связности ∇ на пространствах Y_1 и Y_2 G-структуры имеют соответственно вид

$$d\omega^i = \omega^i_j \wedge \omega^j, \quad d\theta^i = \theta^i_j \wedge \theta^j,$$

где ω^i_j и θ^i_j — компоненты формы римановой связности на соответствующем пространстве G-структуры.

Поскольку $\theta^i = C^i_j\, \omega^j$, то $d\omega^i = (\widetilde{C}^i_k\, \theta^k_r\, C^r_j) \wedge \omega^j$. Отсюда делаем вывод, что $(\omega^i_j - \widetilde{C}^i_k\, \theta^k_r\, C^r_j) \wedge \omega^j = 0$. Применив лемму Картана, получим

$$\omega^i_j = \widetilde{C}^i_k\, \theta^k_r\, C^r_j + C^i_{jk}\omega^k, \text{ где } C^i_{jk} = C^i_{kj}.$$

Так как мы рассматриваем риманову связность, то $\nabla g = 0$ ($g = \{g_{ij}\}$ — метрический тензор). Запишем условие $\nabla g = 0$ в базисах b_1 и b_2:

$$1)\ d\,\widetilde{g}_{ij} + \widetilde{g}_{kj}\,\omega^k_i + \widetilde{g}_{ik}\,\omega^k_j = 0; \quad 2)\ d\,g_{ij} + g_{kj}\,\theta^k_i + g_{ik}\,\theta^k_j = 0.$$

Здесь $\widetilde{g}_{kj}$ — компоненты тензора g в базисе b_1, а g_{kj} — компоненты тензора g в базисе b_2. Поскольку $\widetilde{g}_{ij} = g_{rs}\, C^r_i\, C^s_j$, имеем

$$g_{rs}\, C^r_k\, C^s_j\, \omega^k_i + g_{rs}\, C^r_i\, C^s_k\, \omega^k_j = 0,$$

или

$$g_{ms}\, C^s_j\, \theta^m_p\, C^p_i + g_{rm}\, C^r_i\, \theta^m_p\, C^p_j + (\widetilde{g}_{kj}\, C^k_{il} + \widetilde{g}_{ik}\, C^k_{jl})\,\omega^l = 0.$$

Согласно [3] $g_{ms}\,\theta^m_p = -\,g_{pm}\,\theta^m_s$, поэтому последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$(\widetilde{g}_{kj}\, C^k_{il} + \widetilde{g}_{ik}\, C^k_{jl})\,\omega^l = 0.$$

В силу линейной независимости базисных форм ω^l получаем, что

$$\widetilde{g}_{kj}\, C^k_{il} + \widetilde{g}_{ik}\, C^k_{jl} = 0.$$

Дважды произведя замену индексов $i \to j \to l \to i$, а затем сложив два первых равенства и вычтя третье, получим $\tilde{g}_{kj}\, C^k_{il} = 0$. В силу невырожденности тензора $\tilde{g}_{kj}$ делаем вывод: $C^k_{il} = 0$. В итоге приходим к тому, что

$$\omega^i_j = \tilde{C}^i_k\, \theta^k_r\, C^r_j\,,\ \theta^i_j = C^i_k\, \omega^k_r\, \tilde{C}^r_j\,.$$

На пространстве G-структуры Υ_2 подмногообразие $N^{2n-1} \subset M^{2n}$ задается уравнением Пфаффа $\theta^{\hat{n}} = 0$. Продифференцируем это соотношение внешним образом:

$$\theta^{\hat{n}}_{\overline{\alpha}} \wedge \theta^{\overline{\alpha}} = 0\,, \quad \overline{\alpha}, \overline{\beta} = 1, \ldots, 2n-1.$$

Отсюда в силу леммы Картана имеем $\theta^{\hat{n}}_{\overline{\alpha}} = \sigma_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}\, \theta^{\overline{\beta}}$, где $\sigma_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}} = \sigma_{\overline{\beta}\,\overline{\alpha}}$. Здесь $\sigma_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}$ являются компонентами второй квадратичной формы, характеризующей погружение N в M. Из последних равенств вытекает

$$C^{\hat{n}}_i\, \omega^i_j \tilde{C}^j_{\overline{\alpha}} = \sigma_{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}\, \theta^{\overline{\beta}} = \sigma_{\overline{\alpha}\,\beta}\, \theta^{\beta} + \sigma_{\overline{\alpha}\,n}\, \theta^n,$$

или

$$C^{\hat{n}}_i\, \omega^i_j \tilde{C}^j_{\overline{\alpha}} = \sigma_{\overline{\alpha}\,\beta}\, \theta^{\beta} + \sigma_{\overline{\alpha}\,n}\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega^n + \omega_n\right).$$

Поскольку $\theta^{\hat{n}} = 0$ равносильно тому, что $\omega_n = \omega^n = \dfrac{\theta^n}{\sqrt{2}}$, то, приняв обозначение $\theta = \theta^n$, получим

$$C^{\hat{n}}_i\, \omega^i_j \tilde{C}^j_{\overline{\alpha}} = \sigma_{\overline{\alpha}\,\beta}\, \theta^{\beta} + \sigma_{\overline{\alpha}\,n}\, \theta\,.$$

Заменим обозначение θ на ω. Последнее равенство равносильно совокупности двух таких равенств:

1) $C^{\hat{n}}_i\, \omega^i_j\, \tilde{C}^j_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta}\, \omega^{\beta} + \sigma_{\alpha n}\, \omega$, 2) $C^{\hat{n}}_i\, \omega^i_j\, \tilde{C}^j_n = \sigma_{n\beta}\, \omega^{\beta} + \sigma_{nn}\, \omega$.

Таким образом,

$$1)\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\omega_\alpha^n+\frac{i}{\sqrt{2}}\omega_\alpha^{\hat{n}}=\sigma_{\alpha\beta}\,\omega^\beta+\sigma_{\alpha n}\,\omega$$

или

$$\omega_\alpha^n-\omega_\alpha^{\hat{n}}=i\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\beta}\,\omega^\beta+i\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha n}\,\omega;$$

$$2)\ -\frac{i}{2}\omega_n^n+\frac{i}{2}\omega_n^{\hat{n}}-\frac{i}{2}\omega_{\hat{n}}^n+\frac{i}{2}\omega_{\hat{n}}^{\hat{n}}=\sigma_{n\beta}\,\omega^\beta+\sigma_{nn}\,\omega.$$

Отметим, что $\omega_n^n=-\omega_{\hat{n}}^{\hat{n}}$, $\omega_n^{\hat{n}}=\omega_{nn}=0$, $\omega_{\hat{n}}^n=\omega^{nn}=0$, следовательно,

$$\omega_n^n=i\ \sigma_{n\beta}\,\omega^\beta+i\ \sigma_{nn}\,\omega.$$

Пусть $\alpha=a$. Тогда

$$\omega_a^n-\omega_{na}=i\sqrt{2}\,\sigma_{ab}\,\omega^b+i\sqrt{2}\,\sigma_a^b\,\omega_{\,b}+i\sqrt{2}\,\sigma_{an}\,\omega.$$

Поскольку [3] для почти эрмитовой структуры выполняется равенство

$$\omega_{na}=B_{na}{}^b\,\omega_b+B_{na}{}^n\,\omega_n+\widetilde{B}_{nab}\,\omega^b+\widetilde{B}_{nan}\,\omega^n,$$

или

$$\omega_{na}=\widetilde{B}_{nab}\,\omega^b+B_{na}{}^b\,\omega_b+(B_{na}{}^n+\widetilde{B}_{nan})\,\omega^n,$$

принимая во внимание, что $\omega^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\omega$, получаем

$$\omega_{na}=(\widetilde{B}_{nab}+i\sqrt{2}\,\sigma_{ab})\,\omega^b+(B_{na}{}^b+i\sqrt{2}\,\sigma_a^b)\,\omega_b+$$
$$+(\frac{1}{\sqrt{2}}B_{na}{}^n+\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}_{nan}+i\sqrt{2}\,\sigma_{an})\,\omega.$$

Пусть $\alpha=\hat{a}$. Тогда

$$\omega_{\hat{a}}^n-\omega_{\hat{a}}^{\hat{n}}=i\sqrt{2}\,\sigma_{\hat{a}b}\,\omega^b+i\sqrt{2}\,\sigma_{\hat{a}}^b\,\omega_{\,b}+i\sqrt{2}\,\sigma_{\hat{a}n}\,\omega.$$

С другой стороны,

$$\omega^{na}=\widetilde{B}^{nab}\,\omega_b+B^{na}{}_b\,\omega^b+(B^{na}{}_n+\widetilde{B}^{nan})\,\omega^n.$$

В итоге имеем

$$\omega_n^a = (-\widetilde{B}^{nab} + i\sqrt{2}\,\sigma^{ab})\,\omega_b + (-B^{na}{}_b + i\sqrt{2}\,\sigma_b^a)\,\omega^b +$$
$$+(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{na}{}_n - \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}^{nan} + i\sqrt{2}\,\sigma_n^a)\,\omega.$$

С учетом вышесказанного первая группа структурных уравнений Картана индуцированной почти контактной метрической структуры на пространстве расслоения реперов примет следующий вид:

$$d\,\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + \omega_n^a \wedge \omega^n + B^{ab}{}_c\,\omega^c \wedge \omega_b + B^{an}{}_c\,\omega^c \wedge \omega^n +$$
$$+ B^{ac}{}_n\,\omega^n \wedge \omega_c + B^{abc}\,\omega_b \wedge \omega_c + B^{anc}\,\omega^n \wedge \omega_c + B^{acn}\,\omega_c \wedge \omega^n.$$

Подставив выражение для ω_n^a и принимая во внимание, что $\omega^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega$, получим

$$d\,\omega^a = \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\,\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\,\omega_b \wedge \omega_c + (\sqrt{2}\,B^{an}{}_b + i\sigma_b^a)\,\omega^b \wedge \omega +$$
$$+(-\sqrt{2}\,\widetilde{B}^{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_n - \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}^{abn} + i\,\sigma^{ab})\,\omega_b \wedge \omega. \qquad (1)$$

Аналогично получаем

$$d\,\omega_a = -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\,\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\,\omega^b \wedge \omega^c + (\sqrt{2}\,B_{an}{}^b - i\sigma_a^b)\,\omega_b \wedge \omega +$$
$$+(-\sqrt{2}\,\widetilde{B}_{nab} - \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{B}_{abn} - \frac{1}{\sqrt{2}}B_{ab}{}^n - i\,\sigma_{ab})\,\omega^b \wedge \omega. \qquad (2)$$

Найдем и третье уравнение первой группы структурных уравнений. С учетом упомянутого выше равенства $\omega^n = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}d\,\omega = d\,\omega^n = \omega_a^n \wedge \omega^a + \omega_n^n \wedge \omega^n + B^{na}{}_b\,\omega^b \wedge \omega_a + B^{na}{}_n\omega^n \wedge \omega_a +$$
$$+ B^{nab}\,\omega_a \wedge \omega_b + B^{nnb}\,\omega^n \wedge \omega_b + B^{nbn}\,\omega_b \wedge \omega^n.$$

Подставив выражения для ω_a^n, ω_n^n и ω^n и умножив обе части равенства на $\sqrt{2}$, получим

$$
\begin{gathered}
d\,\omega=\sqrt{2}\,B_{nab}\,\omega^a\wedge\omega^b+\left(\sqrt{2}\,B^{na}{}_b-\sqrt{2}\,B_{nb}{}^a-2i\,\sigma^a_b\right)\omega^b\wedge\omega_a+\\
+\sqrt{2}\,B^{nab}\,\omega_a\wedge\omega_b+\left(\tilde{B}_{nbn}+B_{nb}{}^n+i\,\sigma_{nb}\right)\omega\wedge\omega^b+\\
+\left(\tilde{B}^{nbn}+B^{nb}{}_n-i\,\sigma^b_n\right)\omega\wedge\omega_b.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Теорема. *Первая группа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры, естественно индуцированной на гиперповерхности почти эрмитова многообразия, имеет вид (1—3).*

Заметим, что полученные структурные уравнения Картана произвольной почти контактной метрической структуры на гиперповерхности почти эрмитова многообразия обобщают соответствующие результаты для почти контактных метрических гиперповерхностей специального вида [3; 4].

Список литературы

1. *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1986. Т. 18. С. 25—71.
2. *Sasaki S.* Almost contact manifolds // Lect. Notes Math. 1965. V. 1; 1967. V. 2; 1968. V. 3.
3. *Stepanova L., Banaru M.* On hypersurfaces of quasi-Kahlerian manifolds // An. Stin. Univ. «Al. I. Cuza». Iasi. 2001. T. 47. № 1. P. 165—170.
4. *Banaru M.* On minimality of a Sasakian hypersurfaces in a W_3-manifold // Saitama Math. J. 2002. V. 20. P. 1—7.

L. Stepanova, T. Melekhina

ALMOST CONTACT METRIC STRUCTURES ON HYPERSURFACES OF ALMOST HERMITIAN MANIFOLDS

The Cartan structural equations of an arbitrary almost contact metric structure induced on an oriented hypersurface of an almost Hermitian manifold are obtained.