УДК 514. 764. 3

Т. Г. Аленина

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ПРОСТРАНСТВО АФФИННО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ НА НОРМАЛИЗОВАННОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Работа посвящена изучению пространства аффинно-метрической связности на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset \mathrm{A}_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1,n};\ \bar{I}, \bar{J}, \bar{L}, \bar{K}, \bar{T}, \bar{S} = \overline{0,n};$$

$$i, j, l, k, t, s = \overline{1,n-1};\quad \bar{i}, \bar{j}, \bar{l}, \bar{k}, \bar{t}, \bar{s} = \overline{0,n-1};\ p = 1,2.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_J\}$, подчиненных структурным уравнениям [3]:

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T,\ D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T. \quad (1)$$

В уравнениях (1) каждая из систем функций $\{r^I_{ST}\}$, $\{r^I_{JST}\}$ представляет собой тензор — соответственно тензор кручения и тензор кривизны пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$.

Согласно работе [5], система из $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\{\omega_{\bar J}^{\bar I}\}$

$$\omega_0^I=\theta^I,\omega_0^0=-\frac{1}{n+1}\theta_K^K,\omega_J^I=\theta_J^I-\frac{1}{n+1}\delta_J^I\theta_K^K,\omega_J^0=0 \qquad (2)$$

в силу (1) удовлетворяет структурным уравнениям пространства проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$

$$D\omega_{\bar J}^{\bar I}=\omega_{\bar J}^{\bar K}\wedge\omega_{\bar K}^{\bar I}+\frac{1}{2}R_{\bar J ST}^{\bar I}\omega_0^S\wedge\omega_0^T,\ \omega_{\bar K}^{\bar K}=0, \qquad (3)$$

где тензор кривизны-кручения $R_{\bar J ST}^{\bar I}$ пространства $\mathrm{P}_{n,n}$ имеет строение

$$R_{0ST}^I=r_{ST}^I,R_{0ST}^0=-\frac{1}{n+1}r_{KST}^K,R_{JST}^0=0,R_{JST}^I=r_{JST}^I-\frac{1}{n+1}\delta_J^I r_{KST}^K. \quad (4)$$

Система пфаффовых форм $\{\omega_{\bar J}^{\bar I}\}$ определяет пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$.

В пространстве аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$ рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}. Изучение геометрии гиперповерхности $V_{n-1}\subset\mathrm{A}_{n,n}$ равносильно изучению ее в ассоциированном пространстве проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$.

Уравнение гиперповерхности $V_{n-1}\subset\mathrm{A}_{n,n}$ в репере первого порядка имеет вид:

$$\omega_0^n=0\,. \qquad (5)$$

Согласно [2], последовательно продолжая уравнение (5), с использованием (3) и (4), получим:

$$\omega_k^n=\Lambda_{kj}^n\omega_0^j,\ d\Lambda_{kj}^n+\Lambda_{kj}^n\left(\omega_0^0+\omega_n^n\right)-\Lambda_{kl}^n\omega_j^l-\Lambda_{lj}^n\omega_k^l=\Lambda_{kjl}^n\omega_0^l;$$

$$2\Lambda_{[kj]}^n=-R_{0kj}^n=-r_{kj}^n,\ 2\Lambda_{k[jl]}^n=\Lambda_{ks}^n R_{0jl}^s-R_{kjl}^n=\Lambda_{ks}^n r_{jl}^s-r_{kjl}^n\,.$$

Предполагая гиперповерхность $V_{n-1} \subset \mathrm{A}_{n,n}$ регулярной, можно ввести в рассмотрение обращенный тензор Λ_n^{ik}:

$$d\Lambda_n^{is} = -\Lambda_n^{ik}\Lambda_n^{js}\Lambda_{kjl}^n\omega_0^l + \Lambda_n^{is}\left(\omega_0^0 + \omega_n^n\right) - \Lambda_n^{js}\omega_j^i - \Lambda_n^{ik}\omega_k^s.$$

Предположим, что гиперповерхность нормализована полями квазитензора ν_n^i и тензора ν_i^0:

$$d\nu_n^i - \nu_n^i\omega_n^n + \nu_n^j\omega_j^i + \omega_n^i = \nu_{nk}^i\omega_0^k, \quad d\nu_i^0 + \nu_i^0\omega_0^0 - \nu_j^0\omega_i^j = \nu_{ik}^0\omega_0^k.$$

Согласно [7], на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset \mathrm{A}_{n,n}$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, определяемые системами форм

$$\overset{1}{\theta}{}^i = \omega_0^i,\ \overset{2}{\theta}{}_j^i = \omega_j^i - \nu_n^i\omega_j^n - \delta_j^i\left(\omega_0^0 - \nu_k^0\omega_0^k\right) + \nu_j^0\omega_0^i,$$

$$\overset{2}{\theta}{}^i = \omega_0^i,\ \overset{2}{\theta}{}^i_j = \overset{1}{\theta}{}^i_j + \nu_n^i\omega_j^n + (\delta_j^i\nu_n^l\Lambda_{lk}^n - \delta_j^i\nu_k^0 + \delta_k^i\Lambda_{sj}^n\nu_n^s - \quad (6)$$
$$- \delta_k^i\nu_j^0 + \Lambda_n^{is}\Lambda_{sjk}^n - \Lambda_n^{is}\Lambda_{kj}^n\nu_s^0)\omega_0^k.$$

Эти формы удовлетворяют структурным уравнениям Картана — Лаптева [1; 2]

$$D\overset{p}{\theta}{}^i = \overset{p}{\theta}{}^k \wedge \overset{p}{\theta}{}_k^i + \frac{1}{2}\overset{p}{r}{}^i_{st}\overset{p}{\theta}{}^s \wedge \overset{p}{\theta}{}^t,\ D\overset{p}{\theta}{}_j^i = \overset{p}{\theta}{}_j^k \wedge \overset{p}{\theta}{}_k^i + \frac{1}{2}\overset{p}{r}{}^i_{jst}\overset{p}{\theta}{}^s \wedge \overset{p}{\theta}{}^t,$$

где, например, тензоры кручения $\overset{1}{r}{}^i_{st}$ и кривизны $\overset{1}{r}{}^i_{jst}$ пространства аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ имеют вид:

$$\overset{1}{r}{}^i_{st} = R_{0st}^i + 2\nu_n^i\Lambda_{[st]}^n,$$

$$\overset{1}{r}{}^i_{jst} = R_{jst}^i - \delta_j^i\left(R_{0st}^0 + 2\nu_{[st]}^0 - \nu_l^0 R_{0st}^l\right) - \nu_n^i R_{jst}^n + \nu_j^0 R_{0st}^i +$$
$$+ 2(\nu_{j[s}^0\delta_{t]}^i - \nu_{n[s}^i\Lambda_{|j|t]}^n + \nu_j^0\nu_n^i\Lambda_{[st]}^n - \nu_n^l\nu_n^i\Lambda_{j[s}^n\Lambda_{|l|t]}^n -$$
$$- \nu_j^0\nu_{[s}^0\delta_{t]}^i + \nu_n^l\nu_l^0\Lambda_{j[s}^n\delta_{t]}^i).$$

Предположим, что исходное пространство $\mathrm{A}_{n,n}$ является пространством аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ [4]; следовательно, в пространстве проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$ задано поле локальных абсолютов Q^2_{n-1}:

$$a_{IK}x^I x^K+\frac{1}{c}\left(g_{I0}x^I+cx^0\right)^2=0,\ a_{IK}=a_{KI},\ g_{I0}=g_{0I},\ c=const\neq 0,$$

$$dg_{I0}-g_{K0}\omega^K_I+c\cdot\omega^0_I(\equiv 0)=a_{IK}\omega^K_0, \tag{7}$$

$$da_{IJ}-a_{IK}\omega^K_J-a_{KJ}\omega^K_I=-\frac{1}{c}\left(a_{IK}g_{J0}+a_{JK}g_{I0}\right)\omega^K_0;$$

при этом форма ω^0_0 является главной:

$$\omega^0_0=-\frac{1}{c}g_{K0}\omega^K_0. \tag{8}$$

Известно [6], что наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (7_1) приводит к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства проективно-метрической связности:

$$\begin{gathered}R^0_{0ST}+\frac{1}{c}g_{K0}R^K_{0ST}=0,\ g_{K0}R^K_{IST}+a_{IK}R^K_{0ST}=0,\\ a_{IK}R^K_{JST}+a_{KJ}R^K_{IST}-\frac{1}{c}\left(a_{IK}g_{J0}+a_{JK}g_{I0}\right)R^K_{0ST}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

С пространством аффинной связности $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ ассоциируется пространство проективной связности $\overset{1}{\mathrm{P}}_{n-1,n-1}$, определяемое системой пфаффовых форм $\overset{1}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar j}$ по схеме (2):

$$\overset{1}{\omega}{}^i_0=\overset{1}{\theta}{}^i_0,\ \overset{1}{\omega}{}^0_0=-\frac{1}{n}\overset{1}{\theta}{}^k_k,\ \overset{1}{\omega}{}^i_j=\overset{1}{\theta}{}^i_j-\frac{1}{n}\delta^i_j\overset{1}{\theta}{}^k_k,\ \overset{1}{\omega}{}^0_j=0; \tag{10}$$

формы (10) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\overset{1}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar j}=\overset{1}{\omega}{}^{\bar k}_{\bar j}\wedge\overset{1}{\omega}{}^{\bar i}_{\bar k}+\frac{1}{2}\overset{1}{R}{}^{\bar i}_{\bar j st}\overset{1}{\omega}{}^s_0\wedge\overset{1}{\omega}{}^t_0. \tag{10'}$$

Потребуем, чтобы пространство $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$ было пространством аффинно-метрической связности $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$; следовательно, пространство $\overset{1}{\mathrm{P}}_{n-1,n-1}$ должно быть пространством проективно-метрической связности [6], то есть в нем должно быть задано поле локального абсолюта Q^2_{n-2}:

$$\overset{1}{a}_{ij}\, x^i x^j + \frac{1}{c}\left(\overset{1}{g}_{i0}\, x^i + cx^0\right)^2 = 0,\ \overset{1}{a}_{[ij]} = 0\,,$$

$$d\,\overset{1}{a}_{ij} - \overset{1}{a}_{ik}\,\overset{1}{\omega}{}^k_j - \overset{1}{a}_{kj}\,\overset{1}{\omega}{}^k_i = -\frac{1}{c}\left(\overset{1}{a}_{ik}\,\overset{1}{g}_{j0} + \overset{1}{a}_{jk}\,\overset{1}{g}_{i0}\right)\overset{1}{\omega}{}^k_0, \tag{11}$$

$$d\,\overset{1}{g}_{i0} - \overset{1}{g}_{k0}\,\overset{1}{\omega}{}^k_i + c\cdot\overset{1}{\omega}{}^0_i(\equiv 0) = \overset{1}{a}_{ik}\,\overset{1}{\omega}{}^k_0\,,\ \overset{1}{\omega}{}^0_0 = -\frac{1}{c}\,\overset{1}{g}_{k0}\,\overset{1}{\omega}{}^k_0.$$

В качестве локального абсолюта Q^2_{n-2} пространства $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$ можно взять пересечение локального абсолюта (7_1) исходного пространства $\mathrm{M}_{n,n}$ с касательной гиперплоскостью $\mathrm{T}_{n-1}(\mathrm{A}_0)$ к гиперповерхности $V_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n,n}$ в точке $\mathrm{A}_0 \in V_{n-1}$:

$$a_{IK} x^I x^K + \frac{1}{c}(g_{I0} x^I + cx^0)^2 = 0,\ x^n = 0.$$

Тогда справедливо

$$\overset{1}{a}_{ij} = a_{ij},\ \ \overset{1}{g}_{i0} = g_{i0}\,. \tag{12}$$

При предположениях (12) найдем условия, при которых выполняются (11).

Из (7_2) с использованием (8), (12) получим

$$\begin{aligned} d\,\overset{1}{g}_{i0} - \overset{1}{g}_{k0}\,\overset{1}{\omega}{}^k_i = \overset{1}{a}_{ik}\,\omega^k_0 + g_{k0}\left(\nu^k_n \omega^n_i + \delta^k_i\left(\omega^0_0 - \nu^0_s \omega^s_0\right) + \nu^0_i \omega^k_0\right) + \\ + g_{n0}\omega^n_i + \frac{1}{n}\, g_{i0}\,\overset{1}{\theta}{}^s_s; \end{aligned} \tag{13}$$

здесь, согласно (6_1), $\overset{1}{\theta}{}^s_s = \omega^s_s - \nu^s_n \omega^n_s - (n-1)\left(\omega^0_0 - \nu^0_s \omega^s_0\right) + \nu^0_s \omega^s_0$.

Таким образом, чтобы было справедливо (11_3), необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$g_{k0}\nu^k_n\omega^n_i + g_{i0}\left(\omega^0_0 - \nu^0_s\omega^s_0\right) + g_{k0}\nu^0_i\omega^k_0 + g_{n0}\omega^n_i + \frac{1}{n}g_{i0}\overset{1}{\theta}{}^s_s = 0. \quad (14)$$

Из (8) и (11_4) находим:

$$\overset{1}{\theta}{}^k_k = \frac{n}{c}\overset{1}{g}_{k0}\overset{1}{\omega}{}^k_0. \quad (15)$$

Из (14), (15) с использованием (8) следует, что справедливость (11_3) равносильна выполнению соотношений

$$(g_{k0}\nu^k_n + g_{n0})\Lambda^n_{is} + 2g_{0[s}\nu^0_{i]} = 0. \quad (16)$$

При выполнении (16) из (13) следует (11_3). Продолжая уравнения (11_3), с использованием (10') находим

$$d\overset{1}{a}_{ik} - \overset{1}{a}_{is}\overset{1}{\omega}{}^s_k - \overset{1}{a}_{sk}\overset{1}{\omega}{}^s_i = \overset{1}{a}_{iks}\overset{1}{\omega}{}^s_0; \quad (17_1)$$

$$2\overset{1}{a}_{i[ks]} = \frac{2}{c}\overset{1}{a}_{i[k}\overset{1}{g}_{s]0} + \overset{1}{g}_{t0}\overset{1}{R}{}^t_{iks} + \overset{1}{a}_{it}\overset{1}{R}{}^t_{0ks}; \quad (17_2)$$

при этом из уравнений (17) имеем

$$\overset{1}{a}_{[ik]s} = 0. \quad (18)$$

Симметричность тензора $\overset{1}{a}_{ik}$ равносильна тождеству

$$\overset{1}{a}_{ik}\overset{1}{\omega}{}^i_0\wedge\overset{1}{\omega}{}^k_0 = 0. \quad (19)$$

Замыкая тождества (19), с учетом уравнений (10'), (17_1) получим

$$\left(\overset{1}{a}_{iks} + \frac{2}{c}\overset{1}{a}_{ik}\overset{1}{g}_{s0}\right)\overset{1}{\omega}{}^i_0\wedge\overset{1}{\omega}{}^k_0\wedge\overset{1}{\omega}{}^s_0 = 0, \quad (20)$$

что приводит к соотношениям

$$\overset{1}{a}_{(iks)} = -\frac{2}{c}\overset{1}{a}_{(ik}\overset{1}{g}_{s)0}.$$

Из (20) с использованием (17_2), (18) следует

$$3\overset{1}{a}_{iks} = -\frac{3}{c}\left(\overset{1}{a}_{is}\overset{1}{g}_{k0}+\overset{1}{a}_{ks}\overset{1}{g}_{i0}\right)+\overset{1}{g}_{t0}\left(\overset{1}{R}{}^{t}_{iks}+\overset{1}{R}{}^{t}_{kis}\right)+$$
$$+\overset{1}{a}_{it}\overset{1}{R}{}^{t}_{0ks}+\overset{1}{a}_{kt}\overset{1}{R}{}^{t}_{0is}. \tag{21}$$

В силу (21) уравнения (17_1) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} d\overset{1}{a}_{ik}-\overset{1}{a}_{is}\overset{1}{\omega}{}^{s}_{k}-\overset{1}{a}_{sk}\overset{1}{\omega}{}^{s}_{i} &= -\frac{1}{c}\left(\overset{1}{a}_{is}\overset{1}{g}_{k0}+\overset{1}{a}_{ks}\overset{1}{g}_{i0}\right)\overset{1}{\omega}{}^{s}_{0}+ \\ &+\frac{1}{3}\left(\overset{1}{a}_{it}\overset{1}{R}{}^{t}_{0ks}+\overset{1}{a}_{kt}\overset{1}{R}{}^{t}_{0is}+\overset{1}{g}_{t0}\left(\overset{1}{R}{}^{t}_{iks}+\overset{1}{R}{}^{t}_{kis}\right)\right)\overset{1}{\omega}{}^{s}_{0}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) следует, что (11_2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\overset{1}{a}_{it}\overset{1}{R}{}^{t}_{0ks}+\overset{1}{a}_{kt}\overset{1}{R}{}^{t}_{0is}+\overset{1}{g}_{t0}\left(\overset{1}{R}{}^{t}_{iks}+\overset{1}{R}{}^{t}_{kis}\right)=0\,. \tag{23}$$

Доказана

Теорема 1. *Пространство аффинной связности* $\overset{1}{A}_{n-1,n-1}$, *индуцируемое нормализацией гиперповерхности* $V_{n-1}\subset M_{n,n}$, *является пространством аффинно-метрической связности* $\overset{1}{M}_{n-1,n-1}$ *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения (16), (23).*

Замечание. Если в условиях теоремы 1 пространство $\overset{1}{A}_{n-1,n-1}$ есть пространство аффинно-метрической связности, то справедливы соотношения (9) для $\overset{1}{R}{}^{\bar{i}}_{\bar{j}st}$; в частности, справедливо

$$\overset{1}{g}_{t0}\overset{1}{R}{}^{t}_{iks}+\overset{1}{a}_{it}\overset{1}{R}{}^{t}_{0ks}=0. \tag{24}$$

Из (24) следует справедливость (23). В силу этого теорему 1 можно сформулировать так:

Теорема 2. *Пространство аффинной связности* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n-1,n-1}$, *индуцируемое нормализацией гиперповерхности* $V_{n-1} \subset \mathrm{M}_{n,n}$, *является пространством аффинно-метрической связности* $\overset{1}{\mathrm{M}}_{n-1,n-1}$ *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения (16), (24).*

Список литературы

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности // ДАН СССР. 1943. Т. 41. №8. С. 329—331.

4. *Столяров А. В*. Аффинно-метрическая связность // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. Чебоксары, 2006. №5. С. 158—167.

5. *Столяров А. В*. Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. Чебоксары, 2005. №4. С. 21—27.

6. *Столяров А. В*. Пространство проективно-метрической связности // Известия вузов. Математика. 2003. №11. С. 70—76.

7. *Христофорова А. В*. Двойственная геометрия гиперповерхности в пространстве аффинной связности // Вестник Чувашск. гос. пед. ун-та. Чебоксары, 2006. №3(50). С. 35—42.

T. Alenina

THE SPACE WITH AN AFFINE-METRIC CONNECTION ON THE NORMALIZED HYPERSURFACE

This work is devoted to do a study of the space with an affine-metric connection on the normalized hypersurface.