Н.А. Осьминина

(ПГПУ им. В. Г. Белинского)

О КАНОНИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального проективного преобразования $\widetilde{X}$ касательного расслоения второго порядка $T_2(M_n)$ со связностью полного лифта ∇^c.

Пусть M_n – дифференцируемое многообразие класса C^∞, ∇- линейная связность без кручения, заданная на M_n. На касательном расслоении $T_2\ M_n$ связность ∇ индуцирует линейную связность ∇^c, удовлетворяющую условию:

$$\nabla^c_{X^{II}} Y^{II} = (\nabla_X Y)^{II} \tag{1}$$

для любых $X, Y \in F_0^1(M_n)$, X^{II}, Y^{II} - полные лифты векторных полей X и Y из M_n в $T_2\ M_n$.

Векторное поле $\widetilde{X} \in (T_2(M_n), \nabla^c)$ порождает в касательном расслоении $T_2\ M_n$ инфинитезимальное проективное преобразование тогда и только тогда, когда

$$L_{\widetilde{X}} \nabla^c(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{Y})\widetilde{Z} + \widetilde{\Phi}(\widetilde{Z})\widetilde{Y}, \tag{2}$$

где $L_{\widetilde{X}}$ – производная Ли вдоль векторного поля $\widetilde{X}$; $\widetilde{\Phi}$ - линейная форма на $T_2\ M_n$; $\widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ - векторные поля на $T_2\ M_n$.

Выберем на M_n координатную окрестность (U, x^i). Тогда в координатной окрестности $(\pi^{-1}(U), (x^i, x^{\bar{i}}, x^{\bar{\bar{i}}}))$ векторное поле $\widetilde{X}$ можно разложить по векторам натурального репера:

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \partial_i + \widetilde{X}^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} + \widetilde{X}^{\bar{\bar{i}}} \partial_{\bar{\bar{i}}}. \tag{3}$$

Для нахождения $\widetilde{X}^i, \widetilde{X}^{\bar{i}}, \widetilde{X}^{\bar{\bar{i}}}$ будем интегрировать систему дифференциальных уравнений (2). Запишем ее в развернутом виде.

$$\partial_B \partial_C \tilde{X}^A + \tilde{X}^M \partial_M \tilde{\Gamma}^A_{BC} + \partial_B \tilde{X}^M \tilde{\Gamma}^A_{MC} + \partial_C \tilde{X}^M \tilde{\Gamma}^A_{BM} - \partial_M \tilde{X}^A \tilde{\Gamma}^M_{BC} = \delta^A_B \tilde{\Phi}_C + \delta^A_C \tilde{\Phi}_B, \quad (4)$$

где $\tilde{\Gamma}^A_{BC}$ – компоненты связности ∇^c в координатной окрестности расслоения $(T_2 M_n), \nabla^c$); $A,B,C,M \in \{1,\dots, n, \bar{1},\dots, \bar{n}, \bar{\bar{1}},\dots,\bar{\bar{n}}\} = \Lambda$.

Будем интегрировать систему уравнений (4) при различных комбинациях индексов $\{A,B,C\}$ из множества Λ. Придерживаемся следующей последовательности. Во-первых, интегрируем (4) при значениях $\{i, \bar{\bar{j}}, \bar{\bar{k}}\}, \{i, \bar{\bar{j}}, \bar{k}\}, \{i, \bar{\bar{j}}, k\}, \{i, \bar{j}, \bar{k}\}$ индексов $\{A,B,C\}$. Затем придадим индексам $\{A,B,C\}$ значения $\{\bar{i}, \bar{\bar{j}}, \bar{\bar{k}}\}, \{\bar{i}, \bar{\bar{j}}, \bar{k}\}, \{\bar{i}, \bar{\bar{j}}, k\}, \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Далее рассмотрим систему уравнений (4) при значениях $\{\bar{\bar{i}}, \bar{\bar{j}}, \bar{\bar{k}}\}, \{\bar{\bar{i}}, \bar{\bar{j}}, \bar{k}\}, \{\bar{\bar{i}}, \bar{\bar{j}}, k\}, \{\bar{\bar{i}}, \bar{j}, \bar{k}\}$ индексов $\{A,B,C\}$.

Интегрируя (4) при остальных значениях индексов $\{A,B,C\}$ из множества Λ и, учитывая предыдущие результаты, получим условия, накладывающиеся на компоненты тензоров, входящих в каноническое разложение.

Используя лифты $H_a \gamma_b, a = 0,1,2, b = 1,2$, введенные в [1], каноническое разложение произвольного инфинитезимального проективного преобразования касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта можно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X^{II} + Y^I + Z^0 + F^{H_0\gamma_2} + C^{H_0\gamma_1} + G^{H_1\gamma_2} + K^{H_1\gamma_1} + P^{H_2\gamma_2} + Q^{H_2\gamma_1} + \\ &+ \varphi^{H_1\gamma_2\gamma_2} + \varphi^{H_2\gamma_2\gamma_2} + (\nabla(trC))^{H_1\gamma_1\gamma_1} + (\nabla(trC))^{H_2\gamma_1\gamma_2} + (R \circ C)^{H_2\gamma_1\gamma_1\gamma_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где trC – след тензорного поля C, $(R \circ C)^i_{sqt} = \frac{1}{6} C^m_s R^i_{qtm}$, а тензорные поля, входящие в это разложение, удовлетворяют условиям:

$$\varphi_k = \nabla_k F^m_m = \tilde{\Phi}_{\bar{\bar{k}}}, \; \tilde{\Phi}_{\bar{k}} = \varphi_m \Gamma^m_{sk} x^{\bar{s}} + \nabla_k C^m_m,$$

$$\tilde{\Phi}_k = \varphi_m \Gamma^m_{sk} x^{\bar{\bar{s}}} + \frac{1}{2} \varphi_m x^{\bar{s}} x^{\bar{t}} (\partial_k \Gamma^m_{st} + \Gamma^m_{rk} \Gamma^r_{st}) +$$

$$+ x^{\bar{s}} (\nabla_m \nabla_k C^m_s + \nabla_k C^m_g \Gamma^g_{sm} + C^m_s R^g_{kmg} + G^m_k R^g_{msg}) - \nabla_k P^m_m,$$

$$\nabla_j \varphi_m = 0, \; \varphi_m R^m_{kjt} = 0, \; F^m_k R^i_{mjt} = 0, \; F^m_k R^i_{jmt} = 0, \; F^i_m R^m_{kjt} = 0,$$

$$\varphi_g R^i_{kjt} = F^m_g \nabla_t R^i_{kmj} = F^m_g \nabla_k R^i_{mtj}, \; \nabla_j G^i_k = 0,$$

$$G^m_k R^i_{mgj} = 2 G^i_m R^m_{kjg} = 2 G^m_g R^i_{kjm}, \; G^i_m R^m_{kjg} = \nabla_j \nabla_g C^i_k + C^m_k R^i_{mgj},$$

$$C_s^m R_{jmk}^i + C_k^m R_{jsm}^i + C_j^m R_{msk}^i = 0\,,\ C_m^i R_{kjs}^m + C_s^m R_{kjm}^i = G_m^i R_{kjs}^m\,,$$
$$\nabla_k P_j^i + \nabla_j P_k^i = -\nabla_j \nabla_k X^i + X^m R_{kjm}^i\,,\ \nabla_k P_j^i = \nabla_k K_j^i\,.$$

Нетрудно показать, что данное разложение единственно.

Список литературы

1. *Осьминина Н.А.* О некоторых лифтах касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 1999.

N.A. Osminina

ABOUT CANION DISTRIBUNION FREE INFINITESIMAL PROJECT TRANSFORMATION TANGENT BUNDLES 2-ORDER WITH CONNECTION OF COMPLETE LIFT

It is got canion distribution free infinitesimal project transformation tangent bundles 2-order with connection of complete lift.

УДК 514.75

К.В. Полякова

(Калининградский государственный университет)

ТЕНЗОР ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И АБСОЛЮТНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ

Многомерная поверхность проективного пространства рассмотрена как многообразие касательных плоскостей. Произведена нормализация 2-го рода Нордена. Внесением в дифференциальные уравнения для нормализующего квазитензора λ форм коаффинной связности получены ковариантный дифференциал и ковариантные производные квазитензора λ относительно коаффинной связности. Найдено выражение для внешнего дифференциала от ковариантного дифференциала λ. Линейные комбинации компонент объекта коаффинной кривизны, стоящие при внешних произведениях базисных форм в полученных выражениях, образуют тензор, названный тензором параллельности. Его обращение в нуль имеет инвариантный смысл, состоящий в том, что параллельное перенесение нормали 2-го рода является абсолютным, т.е. осуществляется при ее смещении вдоль всей поверхности. И обратно, если параллельное перенесение нормали 2-го рода в коаффинной связности реализуется вдоль всей поверхности, то ковариантные производные компонент λ равны нулю относительно этой связности. Следо-