УДК 514.75

О.М. Омельян
(Калининградский государственный университет)

ОБОБЩЕНИЕ СВЯЗНОСТИ ЛЕВИ-ЧИВИТА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

В n-мерном проективном пространстве рассматривается распределение m-мерных плоскостей с заданным метрическим тензором. На распределении исследуется объект линейной связности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$. Показано, что аффинная связность с подобъектом Γ^i_{jk} может являться обобщенной связностью Леви-Чивита в случае голономного распределения и в случае полунормализованного 1-го рода распределения с соответствующей адаптацией репера. На неголономном распределении подсвязность с подобъектом Γ^i_{jk} порождается полем метрического тензора и объектом кручения. Подобъект Γ^i_{ja} также охвачен полем метрического тензора лишь в адаптированном репере. Установлено принципиальное различие понятий обобщенной связности Леви-Чивита и индуцированной связности.

В проективном пространстве P_n исследуем распределение NS^g_n m-мерных плоскостей P_m с заданным метрическим тензором g. На распределении плоскостей рассмотрим [1] линейную связность с объектом $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$, компоненты которого удовлетворяют сравнениям по модулю базисных форм ω^K ($K=\overline{1,n}$):

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} \equiv 0,\ \Delta\Gamma^i_{ja} - \Gamma^i_{jk}\omega^k_a + \omega^i_{ja} \equiv 0\ (i,j,k=\overline{1,m};\ a,b,c=\overline{m+1,n});\ (1)$$

$$\omega^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\omega^i_a - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j, \ \omega^i_{ja} = \Lambda^b_{ja}\omega^i_b - \delta^i_j\omega_a. \qquad (2)$$

Эта связность содержит аффинную связность с подобъектом Γ^i_{jk}, обобщающую классическую аффинную связность без кручения на поверхности. Возникает вопрос: может ли линейная связность быть связностью Леви-Чивита, т. е. существует ли охват компонент объекта линейной связности с помощью метрического тензора g и его пфаффовых производных? Следует отметить, что компоненты g_{ij} дважды ковариантного тензора g удовлетворяют условиям

$$\Delta g_{ij} = g_{ijK}\omega^K; \qquad (3)$$

$$g_{ij} = g_{ji}, \ g_{ijK} = g_{jiK}, \ \det(g_{ij}) \neq 0. \qquad (4)$$

Продолжая уравнения (3), получим

$$\Delta g_{ijk} - g_{il}\omega^l_{jk} - g_{lj}\omega^l_{ik} \equiv 0, \ \ \Delta g_{ija} - g_{ijk}\omega^k_a - g_{ik}\omega^k_{ja} - g_{kj}\omega^k_{ia} \equiv 0. \ (5)$$

1. Пусть компоненты объекта аффинной связности симметричны, т. е. кручение $S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} = 0$. В этом случае, исходя из сравнений (1_1), естественно предположить, что формы ω^i_{jk} симметричны по нижним индексам, т. е. $\Lambda^a_{[jk]} = 0$, а значит, распределение является голономным либо $\omega^i_a \equiv 0$. Процициклируем сравнения (5_1) для пфаффовых производных g_{ijk}:

$$\Delta g_{jki} - g_{jl}\omega^l_{ki} - g_{lk}\omega^l_{ji} \equiv 0, \Delta g_{kij} - g_{kl}\omega^l_{ij} - g_{li}\omega^l_{kj} \equiv 0. \qquad (6)$$

В систему (5_1), (6) подставим выражения трехиндексных форм из (1_1) и, учитывая симметрию метрического тензора, вычтем последнее сравнение из суммы двух первых:

$$\Delta[g_{ijk} + g_{jki} - g_{kij} + g_{il}(\Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{kj}) + g_{jl}(\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki}) + g_{kl}(\Gamma^l_{ji} - \Gamma^l_{ij})] \equiv 0.$$

Следовательно, можно положить

$$g_{ijk} + g_{jki} - g_{kij} + g_{il}(\Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{kj}) + g_{jl}(\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ki}) + g_{kl}(\Gamma^l_{ji} - \Gamma^l_{ij}) = 0. \ (7)$$

Рассмотрим голономное распределение S_n^g. С учетом симметрии $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ получаем

$$g_{ijk} + g_{jki} - g_{kij} + 2g_{jl}\Gamma_{ik}^l = 0, \qquad (8)$$

откуда $g_{jl}\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2}(g_{kij} - g_{ijk} - g_{jki})$. Меняя индексы соответствующим образом и учитывая, что у метрического тензора g_{ij} существует обратный тензор g^{ij}, связанный с ним следующим соотношением:

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \qquad (9)$$

получаем

$$\overline{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il}(g_{kjl} - g_{jlk} - g_{lkj}). \qquad (10)$$

Замечание 1. При выводе формулы (10) мы использовали условие симметрии форм ω_{jk}^i, а не условие голономности распределения $\Lambda_{[jk]}^a = 0$, из которого автоматически вытекает симметрия форм ω_{jk}^i.

Формулу (10) можно получить при адаптации репера нормализации 1-го рода неголономного распределения NS_n^g. Для этого запишем деривационную формулу для точек A_a:

$$dA_a = \theta A_a + \omega_a A + \omega_a^i A_i + \omega_a^b A_b. \qquad (11)$$

Произведем оснащение распределения NS_n^g: к каждой точке A присоединим плоскость дополнительной размерности P_{n-m} – нормаль 1-го рода. Получим полунормализованное 1-го рода распределение ${}^1NS_n^g$. Поместим точки A_a в плоскость P_{n-m}. Тогда из уравнений (11) видно, что если $\omega_a^i \equiv 0$, то $dA_a \equiv \omega_a A + (...)_a^b A_b$, т.е. сравнения $\omega_a^i \equiv 0$ являются условиями относительной инвариантности плоскости $P_{n-m}=[A,A_a]$. Выражения для трехиндексных форм (2) в репере, адаптированном нормализации 1-го рода, принимают вид:

$$\omega^i_{jk}=-\delta^i_j\omega_k-\delta^i_k\omega_j, \quad \omega^i_{ja}=-\delta^i_j\omega_a. \qquad (12)$$

Тогда, обращаясь к системе (5_1), (6) и используя равенства $\omega^i_{jk}=\omega^i_{kj}$, получим сравнения

$$\Delta(g_{ijk}+g_{jki}-g_{kij})-2g_{jl}\omega^l_{ik}\equiv 0.$$

Подставляя в эти сравнения выражения для трехиндексных форм из (1_1), получаем равенство (8), откуда следует формула (10).

Теорема 1. *Аффинная связность с подобъектом $\overline{\Gamma}^i_{jk}$, компоненты которого определяются по формуле (10), является обобщенной связностью Леви-Чивита на голономном распределении S^g_n и на полунормализованном 1-го рода неголономном распределении ${}^1NS^g_n$ в адаптированном репере.*

Замечание 2. Объект Γ^i_{jk} охвачен с помощью метрического тензора g и его пфаффовых производных по формуле (10), совпадающей с формулой, определяющей связность Леви-Чивита на поверхности. Эта связность впервые была получена Леви-Чивита в работе [2].

2. Предположим, что компоненты объекта линейной подсвязности несимметричны, т. е. кручение S={S^i_{jk}}$\neq 0$. Так как любую двухиндексную величину можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей, то

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{(jk)}+S^i_{jk}. \qquad (13)$$

Подставляя равенства (13) в (7), получим

$$\Gamma^i_{(jk)}=\frac{1}{2}g^{il}(g_{kjl}-g_{jlk}-g_{lkj}-2g_{jm}S^m_{lk}-2g_{km}S^m_{lj}). \qquad (14)$$

Используя формулу (13), имеем

$$\widehat{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(g_{kjl} - g_{jlk} - g_{lkj} - 2g_{jm}S^m_{lk} - 2g_{km}S^m_{lj}) + S^i_{jk}. \qquad (15)$$

Теорема 2. *На неголономном распределении* NS^g_n *аффинная связность с подобъектом* $\widehat{\Gamma}^i_{jk}$, *компоненты которого определяются формулой (15), порождается полем метрического тензора* g *и объектом кручения* S.

Замечание 3. Из формулы (15) при условии $S=0$ следует формула (10).

3. Обратимся теперь к подобъекту Γ^i_{ja}. В адаптированном нормализации 1-го рода репере сравнения (1_2) упрощаются

$$\Delta\Gamma^i_{ja} + \omega^i_{ja} \equiv 0. \qquad (16)$$

Сравнения (5_2) для пфаффовых производных g_{ija} метрического тензора принимают вид:

$$\Delta g_{ija} - g_{ik}\omega^k_{ja} - g_{kj}\omega^k_{ia} \equiv 0. \qquad (17)$$

Свернем сравнение (17) с тензором $\{-\frac{1}{2}g^{ij}\}$, в результате получим

$$-\frac{1}{2}\Delta(g_{ija}g^{ij}) + \omega^k_{ka} = 0\,.$$

Так как $\Delta\Gamma^k_{ka} \equiv -\omega^k_{ka}$, то $\Delta(\Gamma^k_{ka} + \frac{1}{2}g_{ija}g^{ij}) \equiv 0$. Следовательно, можно положить $\Gamma^i_{ia} = -\frac{1}{2}g_{jka}g^{jk}$. Введем обозначение $\Gamma_a = \Gamma^i_{ia}$, тогда с учетом (12_2, 16) $\Gamma^i_{ja} = \frac{1}{m}\delta^i_j\Gamma_a$, т. е.

$$\widetilde{\Gamma}^i_{ja} = -\frac{1}{2m}\delta^i_j g_{lka}g^{lk}. \qquad (18)$$

Теорема 3. *На полунормализованном 1-го рода распределении* ${}^{1}NS_n^g$ *в адаптированном репере существует порожденная полем метрического тензора линейная подсвязность с подобъектом* $\tilde{\Gamma}^i_{ja}$, *компоненты которого определяются по формуле (18).*

4. При исследовании распределения плоскостей обнаружилось два способа определения касательной линейной связности с объектом $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$: 1) индуцирование связности оснащающим квазитензором λ [3]; 2) порождение связности метрическим тензором g [4]. Возникает очевидный вопрос: существует ли связь между этими двумя способами определения связности? Запишем выражения [3] объекта линейной связности Γ с помощью λ:

$$\hat{\Gamma}^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j,\ \hat{\Gamma}^i_{ja} = \Lambda^b_{ja}\lambda^i_b - \delta^i_j\lambda_a + \delta^i_j\lambda_k\lambda^k_a + \lambda^i_a\lambda_j, \quad (19)$$

причем сравнения для компонент оснащающего квазитензора λ имеют вид:

$$\Delta\lambda_i + \omega_i \equiv 0,\ \Delta\lambda^i_a + \omega^i_a \equiv 0,\ \Delta\lambda_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a \equiv 0. \quad (20)$$

Для того чтобы найти зависимость между g и λ, мы в соответствии с условиями пунктов 1 – 3 данной статьи приравняем правые части выражений охватов для объекта Γ. Во-первых, приравняем (19_1) и (10):

$$2\delta^i_{(j}\lambda_{k)} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \frac{1}{2}g^{il}(g_{kjl} - g_{jlk} - g_{lkj}). \quad (21)$$

Свернем выражения (21) по индексам i и j:

$$\lambda_k = \frac{1}{m+1}(\Lambda^a_{ik}\lambda^i_a - \frac{1}{2}g^{il}(g_{kil} - g_{ilk} - g_{lki})). \quad (22)$$

Утверждение 1. *Если индуцированная аффинная связность* $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ *совпадает с обобщенной связностью Леви-Чивита* $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ *голономного распределения* S_n^g *и полунормализованного 1-го* *рода распределения* ${}^{1}NS_{n}^{g}$*, то оснащающий подквазитензор* λ_{k} *является функцией (22), т. е. нормализация 1-го рода распределений* S_{n}^{g} *и* ${}^{1}NS_{n}^{g}$ *порождает нормализацию 2-го рода.*

Во-вторых, приравняем (19_1) и (15):

$$2\delta^{i}_{(j}\lambda_{k)}=\Lambda^{a}_{jk}\lambda^{i}_{a}-\frac{1}{2}g^{il}(g_{kjl}-g_{jlk}-g_{lkj}-2g_{jm}S^{m}_{lk}-2g_{km}S^{m}_{lj})-S^{i}_{jk}. \quad (23)$$

Сворачивая выражения (23) по индексам i и j, получаем

$$\lambda_{k}=\frac{1}{m+1}[\Lambda^{a}_{ik}\lambda^{i}_{a}-\frac{1}{2}g^{il}(g_{kil}-g_{ilk}-g_{lki}-2g_{im}S^{m}_{lk}-2g_{km}S^{m}_{li})-S^{i}_{ik}]. \quad (24)$$

Утверждение 2. *Если индуцированная аффинная связность* $\hat{\Gamma}^{i}_{jk}$ *совпадает со связностью* $\widehat{\Gamma}^{i}_{jk}$*, порождаемой полем метрического тензора и объектом кручения неголономного распределения* NS_{n}^{g}*, то оснащающий подквазитензор* λ_{k} *является функцией (24), т. е. нормализация 1-го рода и объект кручения распределения* NS_{n}^{g} *порождают нормализацию 2-го рода.*

И наконец, приравняем (19_2) и (18); получим (с учетом сравнений (20_2) и полунормализации 1-го рода), что

$$\delta^{i}_{j}\lambda_{a}=\frac{1}{2m}\delta^{i}_{j}g_{lka}g^{lk}. \quad (25)$$

Свернем (25) по i и j:

$$\lambda_{a}=\frac{1}{2m}g_{lka}g^{lk}. \quad (26)$$

Утверждение 3. *Если индуцированная линейная подсвязность* $\hat{\Gamma}^{i}_{ja}$ *совпадает с обобщенной связностью Леви-Чивита* $\tilde{\Gamma}^{i}_{ja}$ *полунормализованного распределения* ${}^{1}NS_{n}^{g}$*, то оснащающий подквазитензор* λ_a *является функцией (26), т. е. метрика распределения* ${}^{1}NS_{n}^{g}$ *порождает оснащение Картана, подчиненное нормализации 1-го рода.*

Вывод. В общем случае формулы (22, 24, 26) не имеют места, поэтому определение линейной связности с объектом $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$ на распределении NS_n с помощью оснащающего квазитензора λ либо с помощью метрического тензора g есть два разных способа задания связности. В первом случае говорят об индуцированной связности, а во втором случае будем говорить об обобщенной связности Леви-Чивита.

Список литературы

1. *Омельян О.М.* Понятия распределенной и нераспределенной линейных связностей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2003. Вып. 34. С. 103 – 110.
2. *Levi-Civita T.* Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana // Rend. Circolo math. Palermo, 1917. V. 42. P. 173 – 205.
3. *Омельян О.М.* Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей // Междунар. конф. по геометрии и анализу. Пенза, 2003. С. 63 – 69.
4. *Омельян О.М.* Понятие связности Леви-Чивита, обобщенное на распределение плоскостей // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань, 2003. Т. 21. С. 179 – 180.

O. Omelyan

THE GENERALIZATION OF CONNECTION OF LEVI-CHIVITA ON THE DISTRIBUTION OF PLANES

In n-dimensional projective space the distribution of m-planes with the given metric tensor is investigated. On the distribution the object of linear connection $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$ is investigated. It is shown, that affine connection with the subobject Γ^i_{jk} can be the generalized connection of Levi-Chivita in case of the holonomic distribution and in a case the seminormal of 1-st sort of distribution with the appropriate adaptation of a frame. On the nonholonomic distribution the

subconnection with the subobject Γ^{i}_{jk} is generated by a field of a metric tensor and the object of a torsion. The subobject Γ^{i}_{ja} is enveloped by a field of a metric tensor only in the adapted frame. The basic distinction of concepts of the generalized connection of Levi-Chivita and the induced connection is established.

УДК 514.76

В.И. Паньженский
(Пензенский государственный педагогический университет)

О ДВИЖЕНИЯХ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА

На касательном расслоении обобщенного финслерова пространства естественным образом определены две римановых метрики: метрика главной диагонали и метрика второй диагонали. В случае, когда обобщенное финслерово пространство сводится к риманову, эти метрики совпадают с метрикой Сасаки и метрикой полного лифта соответственно. Доказано, что размерность алгебры Ли инфинитезимальных движений, сохраняющих слои, не превосходит $n(n+1)$ – в случае метрики главной диагонали и $3n(n+1)/2$ – в случае метрики второй диагонали, где n – размерность базисного многообразия. Если движения состоят из продолженных преобразований базисного многообразия, то размерность алгебры не превосходит $n(n+1)/2$. Указаны все римановы метрики, для которых алгебра Ли инфинитезимальных движений имеет размерность $n(n+1)/2$.

Пусть *M* – гладкое *n*-мерное многообразие, *TM* – касательное расслоение над *M*, (x^i) – локальные координаты на *M*, $(x^A)=(x^i, x^{n+i}=y^i)$ – естественные локальные координаты на