УДК 514.76 + 517.93

ТОЧЕЧНЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ПУЛЬВЕРИЗАЦИИ

В.А. Игошин

(Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского)

В рамках разработанного автором метода пульверизационного моделирования [1]-[4] найдены критерии точечных инфинитезимальных симметрий пульверизации (или, что одно и то же, геодезического потока обобщенной связности).

1. Пусть $f=(M,f)$ - квазигеодезический поток (КП), т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка на многообразии M с координатным выражением $d^2x^i/dt^2=f^i(x^j,\lambda^j)$, где $\lambda^j= dx^j/dt,\ 1\le i,j\le n-1 =\dim M$. В пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ КП f определена [3],[4] стандартная обобщенная связность $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\delta},\dot{x}^{\delta})$ КП f $(1\le\alpha,\beta,\gamma,\delta\le n;\ \dot{x}^{\alpha}= dx^{\alpha}/d\tau, x^n=t)$, моделирующая КП f в том смысле, что его интегральные кривые в $\overline{M}$ моделируются (совпадают) с геодезическими линиями связности $\overline{\Gamma}$. С.Ли в [5] определил точечное преобразование (симметрию) произвольного обыкновенного дифференциального уравнения и, в частности, КП как диффеоморфизм $\overline{\Phi}: \overline{M}\to\overline{M}$, сохраняющий интегральные кривые. В работах [1]-[4] введены понятия точечной аффинной квазисимметрии (АКС), проективной квазисимметрии (ПКС), аффинной симметрии (АС) и проективной симметрии (ПС) для произвольного КП. При этом лишь определение ПКС совпадает с определением точечной симметрии С.Ли. Остальные три вида точечных симметрий в рамках классической теории не были обнаружены ни самим С.Ли, ни его последователями.

Диффеоморфизм $\overline{\Phi}:\overline{M}\to\overline{M}$ назван в [3] аффинной или проективной квазисимметрией (АКС или ПКС) КП f, если он является аффинным или проективным преобразованием моделирующей КП связности; если, кроме того, $\overline{\Phi}$ сохраняет распределение $dt=0$, то $\overline{\Phi}$ - аффинная или проективная симметрия (АС или ПС) соответственно. В работе [4] вводятся инфинитезимальные аналоги каждого из четырех видов симметрий.

Ниже формулируются теоремы, доказанные с помощью пульверизационного моделирования и результатов работ [1]-[4].

2. Пусть КП $f = (M, f)$ является пульверизацией, т.е. правые части его координатного выражения - функции f^i - имеют вид: $f^i = -\Gamma^i_{jk}(x^s,\lambda^s)\lambda^j\lambda^k$, в котором Γ^i_{jk} - однородные функции нулевой степени по $\lambda= dx/dt$ (1≤i,j,k,s≤n-1=dimM).

Теорема 1. Векторное поле $\overline{X}=X^i\partial_i+X^n\partial_n$ в пространстве событий $M\times R$ пульверизации (M, f) тогда и только тогда является ее точечной инфинитезимальной АКС, когда $\overline{X}=At+B+(ut+v)\partial_n$, где $u=\mathrm{const}$, а векторные поля $A=A^i(x^j)\partial_i$ и $B=B^i(x^j)\partial_i$ и функция $v=v(x^j)$ на M удовлетворяют уравнениям: $L_A\Gamma^i_{jk}=0,\ L_B\Gamma^i_{jk}=0, \nabla_j A^i=0,\ \nabla_{jk}v=0$, в которых символом L_A обозначена производная Ли вдоль поля A, а ∇ - ковариантная производная в связности Γ пульверизации (M, f).

Следствие. $A^s\Gamma^i_{sjk}=0;\quad \nabla_s\Gamma^s_{ijk}=0.$

Замечание.Теорема1 справедлива, в частности, для аффинной пульверизации; связность Γ в этом случае не зависит от направления $\lambda=dx/dt$.

Теорема 2. Векторное поле $\overline{X}=X^i\partial_i+X^n\partial_n$ тогда и только тогда является ПКС пульверизации (M, f), когда:

1) $X^i=tA^i(x^j)+B^i(x^j), X^n=at^2+ut+v$, где A^i и B^i векторные поля, a,u и v - функции на M;

2) $L_A\Gamma^i_{jk}=\delta^i_j(2\nabla_k a)+\delta^i_k(2\nabla_j a),\ L_B\Gamma^i_{jk}=\delta^i_j\nabla_k u+\delta^i_k\nabla_j u$; 3) $\nabla_j A^i=\delta^i_j\, a$б $\nabla_{jk}a=\nabla_{jk}u=\nabla_{jk}v=0$.

Следствие 1. 1)$\nabla_k a=\dfrac{1}{n+1}K_{[sk]}A^s$, где K_{sk} - сокращенный тензор кривизны КПf, а квадратные скобки обозначают альтернирование без деления. 2) $A^s\Gamma^i_{jks}=0;\ (\nabla_s a)\Gamma^s_{ijk}=0;\ (\nabla_s u)\Gamma^s_{ijk}=0;\ (\nabla_s v)\Gamma^s_{ijk}=0.$

Следствие 2. Функция $a=a(x)$ постоянна тогда и только тогда, когда векторное поле $A=A^s\partial_s$ принадлежит ядру $K_{[sk]}$: $K_{[sk]}A^s=0$.

В частности, это имеет место для римановой связности Γ^i_{jk}; тензор K_{sk} в этом случае симметричен и не зависит от направления $\lambda=dx/dt$.

Из предыдущей теоремы вытекает

Теорема 3. Векторное поле $\overline{X}=X^i\partial_i+X^n\partial_n$ в пространстве $\overline{M}=M\times R$ событий аффинной связности (пульверизации) $(M, f)=(M, \Gamma^i_{jk}(x^s))$ тогда и только тогда является точечной ПС этой связности, когда: 1) $X^i=tA^i(x^j)+B^i(x^j); X^n=at^2+ut+v$, где A^i и B^i- векторные поля на M, a,u,v- произвольные постоянные; 2)$L_A\Gamma^i_{jk}=0, L_B\Gamma^i_{jk}=0$, 3)$\nabla_j A^i=\delta^i_j a$.

Следствие. $K_{[sk]}A^s=0.$

Подчеркнем еще раз, что доказательство теоремы 2 (как, впрочем, и других теорем статьи) базируется на пульверизационном моделировании КП; сама же теорема 2 обобщает как аналогичный результат, полученный в [6] для римановых пространств, так и его гипотетический аналог для аффинносвязного случая, о котором в [6] также упомянуто.

Работа поддержана РФФИ (проект № 96-01-00215).

Библиографический список

1. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // ДАН СССР. 1991. Т.320. №3. С.531-535.

2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование I // Изв. вузов. 1992. №6. С.63-70.

3. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование. II // Там же. 1994. №10. С.26-32.

4. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование. III // Там же. 1995. №5. С.39-50.

5. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig: Teubner. 1893. Bd.3. 830 s.

6. *Аминова А.В.* Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений. - Казанский ун-т. Казань, 1991. - 18 с. Деп. в ВИНИТИ 22.04.91, №1707 - В91.

V.A. I g o s h i n

POINT INFINITESIMAL SYMMETRIES OF PULVERIZATION

By means of pulverization (geodesic) modelling method, which developed by author, it is found some geometrical criterion's of point infinitesimal symmetries of pulverization (or, that one and the same, geodesic flow of generalized affine connection).

ÓÄÊ 514.75

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN'SCHER MANNIGFALTIGKEIT (II)

V.V. K a i s e r

(Friedrich-Alexander-Universität Erlanger-Nürnberg)

Ein analytischer Apparat ist umgescchrieben, der Resultaten, die im ersten Teil der Arbeit [1] formulieren sind, erlaubt zu erhalten hat.

2. *Der analytische Apparat* Hier werden die Grundbegriffe der geradlinigen Differentialgeometrie aus moderner Sicht erwähnt.