П р е д л о ж е н и е 2. При $s \geq \frac{n}{2}$ произвол существования сетей Σ_n^s в A_n равен $2(n-s)$ функций n аргументов.

В самом деле, при $s > \frac{n}{2}$ $q'(t) = q+1$ для $t = 1,2,\dots,n-s$, следовательно, $(S_n)_t = 2$ и $q'(t') = q = 1$ для $t' = n-s+1,\dots,s$, отсюда $(S_n)_{t'} = 0$. По формулам (4) имеем

$$S_n = \sum_{t=1}^{n-s}(S_n)_t + \sum_{t'=n-s+1}^{s}(S_n)_{t'} = 2(n-s).$$

При $s = \frac{n}{2}$ $(s=n-s)$ $q'(t) = q = 2$ для $t = 1,2,\dots,s$, откуда $(S_n)_t = 2$ и $S_n = 2\cdot s = 2(n-s)$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что во всех рассмотренных выше случаях критерий Картана [3] выполнен, т.е. число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$ равно числу произвольных параметров N (см. формулы (4)).

Из предложений 1 и 2 имеем теорему.

Т е о р е м а. Произвол существования сетей Σ_n^s $(1 \le s \le n-1)$ в аффинном пространстве A_n не превышает $2\cdot(\min\{n-s, s\})$ функций n аргументов.

3. В заключение укажем пример сети Σ_n^s $(s < \frac{n}{2})$ в A_n, определяющейся с максимальным произволом, т.е. $S_n = 2s$. Геометрически такую сеть можно выделить, потребовав, чтобы среди $q'(t)$ $(t = 1,2,\dots,s)$ 1-распределений $\Delta(\vec{e}_{u_t})$ $q'(t)-2$ были параллельными, а оставшиеся распределения были либо оба Δ_2-параллельными, либо одно из них – только Δ_3-параллельным, а другое распределение – параллельным.

Список литературы

1. Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В. Сети на многообразиях. - Проблемы геометрии. Т.12. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М., 1981, с.97-125.

2. Кузьмин М.К. Сети Σ_n^s $(s \geq \frac{n}{2})$. - Прикладные вопросы дифференциальной геометрии. Вып.1. М., с.52-56. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ АН СССР 7 апр. 1982г., №1648-82 Деп.).

3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.14 1983

УДК 514.75

Н.Н.Л о к о т к о в

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ $T: T_x \to N_x$

На p-мерной поверхности V_p в евклидовом пространстве E_n выделяются распределения Δ_τ $(1 \le \tau < p)$, вдоль которых параллельно в нормальной связности единичное нормальное векторное поле, и $\Delta_{p-\tau}$-распределение, ортогональное к распределению Δ_τ. В работе рассмотрено отображение $T: T_x \to N_x$ касательного пространства T_x в нормальное пространство N_x такое, что $T(\vec{e}) = \vec{0}$, если $\vec{e} \in \Delta_\tau(x)$, и $T(\vec{e}) \neq \vec{0}$, если $\vec{e} \in \Delta_{p-\tau}$.

1. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R = \{x, \vec{e}_J, \vec{e}_\alpha\}$, где $x \in V_p$, векторы $\vec{e}_J$ $(J, j, k, \dots = \overline{1,p})$ лежат в касательном пространстве T_x к поверхности V_p в точке x, векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma,\dots = \overline{p+1,n})$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dx = \omega^J \vec{e}_J;\quad d\vec{e}_J = \omega_J^j \vec{e}_j + \omega_J^\alpha e_\alpha;\quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^J \vec{e}_J + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \qquad (1)$$

Все дифференциальные формы ω удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства. Поверхность V_p в репере R определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha = 0$. Продолжая систему, получим

$$\omega_J^\alpha = b_{Jj}^\alpha \omega^j,\quad b_{Jj}^\alpha = b_{jJ}^\alpha. \qquad (2)$$

Величины b_{Jj}^α образуют второй фундаментальный тензор поверхности V_p. Легко проверить, что

$$db_{Jj}^\alpha = b_{Jk}^\alpha \omega_j^k + b_{jk}^\alpha \omega_J^k - b_{Jj}^\beta \omega_\beta^\alpha + b_{Jjk}^\alpha \omega^k \qquad (3)$$

Формы ω^β_α определяют связность в нормальном расслоении, которая называется нормальной связностью [2]. Тензор кривизны этой связности определяется равенствами

$$R^\alpha_{\beta\mathcal{J}\mathfrak{j}}=\gamma^{\varkappa\mathcal{L}}\left(b^\beta_{\varkappa\mathcal{J}}b^\alpha_{\mathcal{L}\mathfrak{j}}-b^\beta_{\varkappa\mathfrak{j}}b^\alpha_{\mathcal{L}\mathcal{J}}\right), \qquad (4)$$

$\gamma^{\varkappa\mathcal{L}}$ - контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{\varkappa\mathcal{L}}$. Пусть задано нормальное векторное поле $\vec e_{p+1}$, $|\vec e_{p+1}|=1$. Формы ω^α_{p+1} станут главными: $\omega^\alpha_{p+1}=\lambda^\alpha_\varkappa\omega^\varkappa$. Продолжая последнюю систему, найдем, что

$$d\lambda^\alpha_\varkappa=\lambda^\alpha_{\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_\varkappa+b^\alpha_{\varkappa\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{p+1}-\lambda^\beta_\varkappa\omega^\alpha_\beta+\lambda^\alpha_{\varkappa\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}},\quad \lambda^\alpha_{\varkappa\mathcal{J}}=\lambda^\alpha_{\varkappa\mathcal{J}}. \qquad (5)$$

Можно показать, что величины $\lambda^\alpha_\varkappa$ образуют тензор.

Формы, определяющие направление, вдоль которого параллельно в нормальной связности векторное поле $\vec e_{p+1}$, являются решением системы $\lambda^\alpha_{\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}=0$ [1]. Если $rang\|\lambda^\alpha_{\mathcal{J}}\|=p-r$, то на поверхности V_p возникает (локально) распределение Δ_r, вдоль которого параллельно векторное поле $\vec e_{p+1}$. Направим векторы $\vec e_i\in\Delta_r$ $(i,j,k\ldots=\overline{1,r};\ \varepsilon,\delta,\ldots=\overline{r+1,p})$, а векторы $\vec e_\varepsilon\in\Delta_{p-r}$ (распределение, ортогональное к Δ_r). Получим

$$\lambda^\alpha_i=0. \qquad (6)$$

Распределения Δ_r и Δ_{p-r} интегрируемы тогда и только тогда, когда $\nu^\varepsilon_{ij}=a^\varepsilon_{ij}-a^\varepsilon_{ji}=0$ и $\nu^i_{\varepsilon\delta}=a^i_{\varepsilon\delta}-a^i_{\delta\varepsilon}=0$ соответственно, где $a^\varepsilon_{i\mathcal{J}}$ - коэффициенты разложения форм ω^ε_i по главным формам $\omega^\varepsilon_i=a^\varepsilon_{i\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}$.

Рассмотрим отображение $T: T_x\to N_x$ по закону: вектор $f^\varkappa\vec e_\varkappa$ переходит в вектор $\lambda^\alpha_\varkappa f^\varkappa\vec e_j$. В силу равенств (6) имеем $T(f^\varkappa\vec e_\varkappa)=\lambda^\alpha_\varepsilon f^\varepsilon\vec e_\alpha$. Значит, можно считать, что отображение T переводит векторное пространство $\Delta_{p-r}(x)$ в векторное пространство Π^0, порожденное векторами $\lambda^\alpha_\varepsilon\vec e_\alpha$. Отображение T - линейное, и так как $dim\,\Delta_{p-r}(x)=dim\,\Pi^0=rang\|\lambda^\alpha_\varepsilon\|=p-r$, то существует $p-r$ взаимно ортогональных направлений $f^\delta_\varepsilon\vec e_\delta$, переходящих при отображении T в ортогональные направления. Направим векторы $\vec e_\varepsilon$ коллинеарно векторам $f^\delta_\varepsilon\vec e_\delta$, а векторы $\vec e_{n-p+\varepsilon}$ коллинеарно соответствующим векторам $\lambda^\alpha_\delta f^\delta_\varepsilon\vec e_\alpha$. Нам понадобятся

индексы:

$$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\ldots=\overline{p+1,\ p+(n-p-(p-r))};\quad n-p+\varepsilon,\ldots=\overline{n-p+r,\ n}$$

В построенном ортонормированном репере к равенствам (6) добавятся равенства

$$\lambda^{n-p+\delta}_\varepsilon=0,\ (\varepsilon\neq\delta);\quad \lambda^{\alpha_1}_\varepsilon=0. \qquad (7)$$

Векторы $\vec e_i$ мы можем направить по некоторым фиксированным направлениям в распределении Δ_r. Тогда все формы $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathfrak{j}}$ $(\mathcal{J}\neq\mathfrak{j})$ станут главными: $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathfrak{j}}=a^{\mathcal{J}}_{\mathfrak{j}\varkappa}\omega^\varkappa$.

Из тождеств (6), на основании равенств (5),(7) получим

$$\lambda^{n-p+\varepsilon}_\delta a^\delta_{i\mathcal{J}}-\sum_{\mathfrak{j}}b^{n-p+\varepsilon}_{i\mathfrak{j}}+\lambda^{n-p+\varepsilon}_{i\mathcal{J}}=0, \qquad (8)$$

$$-\sum_{\mathfrak{j}}b^{\alpha_1}_{i\mathfrak{j}}b^{p+1}_{\mathfrak{j}\mathcal{J}}+\lambda^{\alpha_1}_{i\mathcal{J}}=0. \qquad (9)$$

Дифференцируя тождества (7), находим

$$\lambda^{n-p+\delta}_\rho a^\rho_{\varepsilon\varkappa}-\sum_{\mathfrak{j}}b^{n-p+\delta}_{\varepsilon\mathfrak{j}}b^{p+1}_{\mathfrak{j}\varkappa}-\lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon\lambda^{n-p+\delta}_{n-p+\rho,\varkappa}+\lambda^{n-p+\delta}_{\varepsilon\varkappa}=0, \qquad (10)$$

$$-\sum_{\mathfrak{j}}b^{\alpha_1}_{\varepsilon\mathfrak{j}}b^{p+1}_{\mathfrak{j}\varkappa}-\lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon\lambda^{\alpha_1}_{n-p+\rho,\varkappa}+\lambda^{\alpha_1}_{\varepsilon\varkappa}=0. \qquad (11)$$

Так как мы зафиксировали векторные поля $\vec e_{n-p+\varepsilon}$, то формы $\omega^\alpha_{n-p+\varepsilon}$ главные

$$\omega^\alpha_{n-p+\varepsilon}=\lambda^\alpha_{n-p+\varepsilon,\varkappa}\omega^\varkappa,\quad \lambda^\alpha_{n-p+\varepsilon,\varkappa}=-\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\alpha,\varkappa}$$

Векторное поле $\vec e_{n-p+\varepsilon}$ параллельно в нормальной связности, если $\omega^\alpha_{n-p+\varepsilon}=0$. Следовательно, векторное поле $\vec e_{n-p+\varepsilon}$ параллельно в направлении ω^i тогда и только тогда, когда

$$\lambda^\alpha_{n-p+\varepsilon,i}=0. \qquad (12)$$

В равенствах (8) возьмем индекс $\mathcal{J}=\varepsilon$, в равенствах (10) индекс $\varkappa=i$. Получим

$$a^\rho_{i\varepsilon}\lambda^{n-p+\delta}_\rho-\sum_{\mathfrak{j}}b^{n-p+\delta}_{i\mathfrak{j}}b^{p+1}_{\mathfrak{j}\varepsilon}=-\sum_{\mathfrak{j}}b^{n-p+\delta}_{\varepsilon\mathfrak{j}}b^{p+1}_{\mathfrak{j}i}+\lambda^{n-p+\delta}_\rho a^\rho_{\varepsilon i}-\lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon\lambda^{n-p+\delta}_{n-p+\rho,i},$$

или, согласно равенствам (4),

$$\lambda^{n-p+\rho}_\varepsilon\lambda^{n-p+\delta}_{n-p+\rho,i}=R^{n-p+\delta}_{p+1,\varepsilon i}+\lambda^{n-p+\delta}_\rho\nu^\rho_{\varepsilon i}. \qquad (13)$$

Аналогично, положив в равенствах (9) индекс $\mathcal{J}=\varepsilon$, а в

равенствах (II) индекс $\mathcal{K}=i$, имеем
$$\lambda^{n-p+\varsigma}_{\varepsilon}\lambda^{\alpha_1}_{n-p+\varsigma,i}=R^{\alpha_1}_{p+1\,\varepsilon i}. \qquad (14)$$
Коэффициенты $\lambda^{n-p+\varsigma}_{\varepsilon}$ отличны от нуля. Поэтому из равенств (12),(13),(14) следует, что векторное поле $\vec{e}_{n-p+\varsigma}$ параллельно в нормальной связности в направлении ω^i тогда и только тогда, когда
$$R^{\alpha_1}_{p+1\,\varepsilon i}=0,\quad R^{n-p+\delta}_{p+1\,\varepsilon i}+\lambda^{n-p+\delta}_{\varsigma}\nu^{\varsigma}_{\varepsilon i}=0 \qquad (15)$$

2. Пусть поверхность V_p -омбилическая относительно нормали $\vec{e}_{p+1}$, т.е. в ортонормированном репере имеем
$$b^{p+1}_{JJ}=b^{p+1}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}. \qquad (16)$$
Из равенств (4),(16) получим $R^{\alpha}_{p+1\,\mathcal{J}\mathcal{J}}=0$. Поэтому условие (15) примет вид $\nu^{\delta}_{\varepsilon i}=0$. Так как репер R ортонормированный, то $\nu^{\delta}_{\varepsilon i}=-\nu^{\delta}_{i\varepsilon}=\nu^{i}_{\delta\varepsilon}$. На основании изложенного сформулируем

Т е о р е м у 1. Если поверхность V_p -омбилическая относительно нормали $\vec{e}_{p+1}$, то распределение $\Delta_{p-\tau}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда всякое векторное поле $\vec{e}_{n-p+\varepsilon}$ параллельно в нормальной связности вдоль распределения Δ_{τ}.

При омбиличности поверхности V_p относительно нормали $\vec{e}_{p+1}$ распределение Δ_{τ} интегрируемо, и поверхность V_{τ} лежит на гиперсфере $S(c)$ с центром
$$\vec{c}=\vec{x}+\vec{e}_{p+1}/b^{p+1}_{11} \qquad (17)$$
и радиусом $|1/b^{p+1}_{11}|$ [1]. Рассмотрим случай, когда гиперсфера $S(c)$ не вырождается в гиперплоскость. Если точка x перемещается по поверхности V_p, то точка c описывает поверхность центров $\tilde{V}$. Продифференцировав тождества (17), на основании равенств (1),(3) получим
$$d\vec{c}=\Big(\big(1-\frac{b^{p+1}_{JJ}}{b^{p+1}_{11}}\big)\vec{e}_{J}-\frac{1}{(b^{p+1}_{11})^2}\big(\sum_{\alpha}b^{\alpha}_{11}\lambda^{\alpha}_{J}+b^{p+1}_{11J}\big)\vec{e}_{p+1}+\frac{1}{b^{p+1}_{11}}\lambda^{\alpha}_{J}\vec{e}_{\alpha}\Big)\omega^{J}.$$
Можно показать, что последнее равенство эквивалентно равенству
$$d\vec{c}=\Big(-\big(\sum_{\alpha}b^{\alpha}_{11}\lambda^{\alpha}_{\varepsilon}\vec{e}_{p+1}\big)/(b^{p+1}_{11})^2+\lambda^{\alpha}_{\varepsilon}\vec{e}_{\alpha}/b^{p+1}_{11}\Big)\omega^{\varepsilon}$$

Следовательно, касательная плоскость $T(c)$ к поверхности $\tilde{V}$ в точке c порождена векторами
$$\vec{c}_{\varepsilon}=-b^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\vec{e}_{p+1}/b^{p+1}_{11}+\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\vec{e}_{n-p+\varepsilon}.$$
Метрический тензор $\tilde{\gamma}_{\varepsilon\delta}$ поверхности $\tilde{V}$ определяется равенствами
$$\gamma_{\varepsilon\delta}=b^{n-p+\varepsilon}_{11}\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}b^{n-p+\delta}_{11}\lambda^{n-p+\delta}_{\delta}/(b^{p+1}_{11})^2$$
Ортогональным направлениям $\vec{e}_{\varepsilon}$ на распределении $\Delta_{p-\tau}$ будут соответствовать ортогональные направления на поверхности $\tilde{V}$ тогда и только тогда, когда
$$b^{n-p+\varepsilon}_{11}b^{n-p+\delta}_{11}\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\lambda^{n-p+\delta}_{\delta}=0,\quad (\varepsilon\neq\delta).$$
По построению $\lambda^{n-p+\varepsilon}_{\varepsilon}\neq 0$, следовательно,
$$b^{n-p+\varepsilon}_{11}b^{n-p+\delta}_{11}=0,\quad (\varepsilon\neq\delta). \qquad (18)$$
Равенства (18) возможны, если только $b^{n-p+\varepsilon}_{11}=0$ для всех ε, за исключением, быть может, одного. То есть, линия ω^1 является асимптотической относительно некоторых $p-\tau-1$ квадратичных форм $\Phi^{n-p+\varepsilon}=b^{n-p+\varepsilon}_{\mathcal{J}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}$. Так как выполняются равенства (16), то при рассмотрении поверхности $\tilde{V}$ мы могли вместо b^{p+1}_{11} взять любое b^{p+1}_{ii}, поэтому справедлива

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы ортогональным направлениям $\vec{e}_{\varepsilon}$ на распределении $\Delta_{p-\tau}$ соответствовали ортогональные направления на поверхности $\tilde{V}$, необходимо и достаточно, чтобы на распределении Δ_{τ} имелось направление, асимптотическое относительно некоторых $p-\tau-1$ из форм $\Phi^{n-p+\varepsilon}$

Список литературы

I. Локотков Н.Н. О специальном расслоении p-поверхности в евклидовом пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I3, Калининград, I982, с.54-60.

2. Лумисте Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространствах постоянной кривизны. Проблемы геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), I98I, т.I2, с.3-30.