УДК 514.75

М. А. Чешкова

(Алтайский государственный университет, г. Барнаул)

ИНДИКАТРИСЫ НОРМАЛЬНЫХ КРИВИЗН ПАРЫ 2-ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^4

В евклидовом пространстве E^4 рассматриваются две гладкие 2-поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \bar{M}$. Исследуется случай, когда касательные 2-плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \bar{M}$ ортогональны.

Ключевые слова: конформное отображение поверхностей, индикатриса нормальной кривизны.

В евклидовом пространстве E^4 рассмотрим две гладкие 2-поверхности $M, \bar{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \bar{M}$. Будем предполагать, что касательные 2-плоскости в соответствующих точках $p \in M, f(p) \in \bar{M}$ ортогональны.

Перенесем вектор $df(v) \in T_{f(p)}\bar{M}, v \in T_p M$ параллельно в точку $p \in M$. Обозначим полученный вектор через $(dfv)^*$.

Таким образом, определено отображение $\Omega : TM \to T^{\perp}M$, где $\Omega X = (df(X))^*$, $X \in TM$.

Пусть $\tau \in T_p M$ — орт. Конец вектора нормальной кривизны по направлению τ поверхности M при переменном τ опишет в $T_p^{\perp}M$ кривую Q, которая называется индикатрисой нормальной кривизны поверхности M в точке p и является эллипсом. Если нормальная связность на поверхности плоская, то эллипс вырождается в отрезок либо точку.

Векторы нормальной кривизны поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p)$ перенесем параллельно в точку p. Концы этих векторов в T_pM опишут кривую $\bar{Q}$, параллельную индикатрисе нормальной кривизны поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p)$.

Теорема. *Если $f : M \to \bar{M}$ конформное отображение ортогональных 2-поверхностей, то отображение $\Omega : TM \to T^{\perp}M$ переводит кривую $\bar{Q}$ в кривую, симметричную кривой Q относительно точки p.*

1. Основные формулы. Пусть $M, \bar{M}$ — две гладкие 2-поверхности, $f : M \to \bar{M}$ — диффеоморфизм.

Формулы Гаусса — Вейнгартена поверхности M имеют вид [1, с. 23]:

$$\partial_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \partial_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi ,$$

где $X,Y \in T^1_0(M), \nabla$ — связность Леви-Чивита метрики $g(X,Y) = \langle X,Y \rangle, \alpha(X,Y)$ — вторая фундаментальная форма поверхности M, $A_\xi \in T^1_1(M)$ — симметричный оператор, соответствующий $\xi \in T^{\perp}M$, $\nabla^{\perp}$ — нормальная связность, $\langle , \rangle$ — скалярное произведение, причем $\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi \rangle$.

Обозначим через $r(p)$ радиус-вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}\ (p)$ — радиус-вектор точки $f(p) \in \bar{M}$. Тогда отображение $f : M \to \bar{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = f(r).$$

Дифференциал отображения f определится из равенства $df(X) = df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r}$, отображение $\Omega : TM \to T^{\perp}M$ из равенства $\Omega X = (df(X))^*, X \in TM$.

Связность $\bar{\nabla}$ Леви-Чивита метрики

$\bar{g}(X,Y) = \langle dfX, dfY \rangle = \langle \Omega X, \Omega Y \rangle$ имеет вид [2]

$$\overline{\overline{\nabla}}_X Y = \Omega^{-1}\nabla^{\perp}_X \Omega Y .$$

Если β — вторая фундаментальная форма поверхности $\overline{M}$, то $\overline{\alpha}(X,Y)=\beta(\Omega X,\Omega Y)=\partial_X df(Y)-df(\overline{\nabla}_X Y)$.

Имеем $\overline{\alpha}(X,Y)=\partial_X \Omega Y-\Omega(\Omega^{-1}\nabla^{\perp}_X Y)=-A_{\Omega Y}X$. Таким образом,

$$\overline{\alpha}(X,Y)=\beta(\Omega X,\Omega Y)=-A_{\Omega X}Y=-A_{\Omega Y}X , \tag{1}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &< \overline{\alpha}(X,Y),Z >= -< A_{\Omega X}Y,Z >= -< Y,A_{\Omega X}Z >= \\ &= -< Y,A_{\Omega Z}X >= -< \alpha(X,Y),\Omega Z > . \end{aligned} \tag{2}$$

2. Доказательство теоремы. Пусть $f:M\rightarrow\overline{M}$ — конформное отображение. Тогда

$$\overline{g}(X,Y)=< \Omega X,\Omega Y >= k^2 g(X,Y) .$$

В силу (2) имеем

$$< \overline{\alpha}(X,Y),Z >= -< \Omega\Omega^{-1}\alpha(X,Y),\Omega Z >= -k^2 < \Omega^{-1}\alpha(X,Y),Z > .$$

Таким образом,

$$\alpha(X,Y)=-\frac{1}{k^2}\Omega\overline{\alpha}(X,Y) . \tag{3}$$

Пусть $\tau\in T_p M$ — орт. Конец вектора нормальной кривизны $\alpha(\tau,\tau)$ по направлению τ поверхности M при переменном τ опишет в $T^{\perp}_p M$ индикатрису Q нормальной кривизны поверхности M в точке p.

Выберем ортобазис v_1,v_2,e_1,e_2 так, что $v_1,v_2\in T_p M$, $e_1,e_2\in T^{\perp}_p M$.

Положим $\tau=cos(\gamma)v_1+sin(\gamma)v_2$. Тогда индикатриса Q нормальной кривизны поверхности M в точке p запишется в виде

$$\begin{aligned} &\xi=\xi(\gamma)=\alpha(\tau,\tau)=\cos^2(\gamma)\alpha(v_1,v_1)+ \\ &+\sin(2\gamma)\alpha(v_1,v_2)+\sin^2(\gamma)\alpha(v_{2,},v_2). \end{aligned}$$

Аналогично получим, что индикатриса $\bar{Q}$ нормальной кривизны поверхности $\bar{M}$ в точке $f(p)$ имеет вид:

$$u = u(\gamma) = \cos^2(\gamma)\beta(e_1, e_1) + \sin(2\gamma)\beta(e_1 e_2) + \sin^2(\gamma)\beta(e_2, e_2).$$

Если отображение конформное, то векторы $\Omega(v_1), \Omega(v_2)$ ортогональны и $|\Omega(v_1)| = |\Omega(v_2)| = k$.

Положим $e_i = \Omega(v_i)/|k|, i = 1,2$. Тогда в силу (1) имеем

$$u = u(\gamma) = \cos^2(\gamma)\bar{\alpha}(v_1, v_1) + \sin(2\gamma)\bar{\alpha}(v_1, v_2) + \sin^2(\gamma)\bar{\alpha}(v_{2,}, v_2).$$

Используя (3), получим $\Omega u(\gamma) = -\xi(\gamma)$. Таким образом, кривые $Q, \Omega(\bar{Q})$ симметричны относительно точки p.

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.

2. *Чешкова М.А.* К геометрии пары ортогональных n-поверхностей в E^{2n} // Сиб. мат. ж. 1995. №1. С. 228—232.

M. Cheshkova

THE NORMAL CURVATURES INDICATRIX
FOR PAIR of 2-SURFACES IN E^4

Let $M, \bar{M}$ be surfaces in Euclidean space E^4 with orthogonal tangent planes and the mapping $f : M \to \bar{M}$. There is the mapping $\Omega : TM \to T^{\perp}M$, where $\Omega X = df(X),\ X \in TM$. Let Q be normal curvature indicatrix of the surfaces M at the point $p \in M$ and $\bar{Q}$ be normal curvature indicatrix of the surfaces $\bar{M}$ at the point $f(p) \in \bar{M}$.

Theorem. *Let $M, \bar{M}$ be surfaces in Euclidean space E^4 with orthogonal tangent planes and $f : M \to \bar{M}$ be the conform mapping. Then $\Omega\bar{Q}$ is symmetric to Q with respect to p.*