рядка с кривой $\ell: \mathbb{R} \to R(q)$ в элементе $\ell(0)$, называется касательной к кривой ℓ в элементе $\ell(0)$.

Теорема 2. Кривая $\ell: \mathbb{R} \to R(q)$ является инфлексионной в элементе $\ell(0)$ кривой тогда и только тогда, когда касательная к ней в элементе $\ell(0)$ цепь имеет с этой кривой в $\ell(0)$ геометрическое касание 2-го порядка.

Доказательство непосредственно следует из формул (3), (4) и определений 2, 4.

Теорема 3. Направление, определяемое в точке P^0 инфлексионной в ней кривой ℓ, является характеристическим направлением отображения f тогда и только тогда, когда кривая $f \circ \ell$ является инфлексионной в элементе $f(\ell(0))$ кривой.

Доказательство. Пусть $\ell: \mathbb{R} \to A_n: \ell(0) = P^0$ – инфлексионная в P^0 кривая, тогда:

$$X^J = \Lambda^J (t + \tfrac{1}{2} k t^2) + <3>.$$

Из разложения в ряд Тейлора отображения f:

$$c^i = \Lambda^i_J X^J + \tfrac{1}{2} \Lambda^i_{JK} X^J X^K + <3>,$$

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ} X^J + \tfrac{1}{2} \Lambda_{ijJK} X^J X^K + <3>$$

и определений I, 2 следует утверждение теоремы.

Библиографический список

I. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ. I969. Т.2. С.I79-206.

2. Андреев Б.А. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_N(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I978. Вып.9. С.II-I9.

3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия, I963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., I965. С.65-I07.

УДК 514.8

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ МЕТРИК НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОЛИСИСТЕМАМИ

С.И.Алешников

(Калининградский государственный университет)

В работах [1], [2], [3] изучались метрики, порождаемые динамическими полисистемами на гладком многообразии. Настоящая работа завершает исследование локальной структуры таких метрик.

Пусть V –связное компактное многообразие класса C^∞ размерности N, на котором определены полные попарно коммутирующие векторные поля X_i $(1 \le i \le N)$ класса C^∞, такие, что для любой точки $a \in V$ векторы $X_1(a), \dots, X_N(a)$ линейно независимы в касательном пространстве $T_a(V)$, g – риманова метрика, δ – расстояние на V, описанные в [1].

Предложение I. Пусть W – замкнутое интегральное многообразие одного из полей X_i, $x_0 \in V$. Тогда множество точек локальных минимумов функции $y \mapsto \delta(x_0, y)$, где $y \in W$, конечно.

Доказательство. I) Обозначим $\mathcal{D}$ –множество точек локальных минимумов функции $y \mapsto \delta(x_0, y)$ на множестве W. Покажем, что $\mathcal{D}$ состоит из изолированных точек. Пусть $y_0 \in \mathcal{D}$. Это значит, что существует окрестность O_{y_0} точки y_0 в W, такая, что $\delta(x_0, y) \ge \delta(x_0, y_0)$ для всех $y \in O_{y_0}$. В [3] было показано, что точка y_0 обладает такой окрестностью $\Omega_{y_0}(x_0)$ в W, что для всех $y_0 \in \Omega_{y_0}(x_0)$ выполняется

$$|\delta(x_0, y) - \delta(x_0, y_0)| = \delta(y, y_0). \qquad (I)$$

Тогда на пересечении $O_{y_0} \cap \Omega_{y_0}(x_0)$ имеем $\delta(x_0, y) = \delta(x_0, y_0) + \delta(y, y_0)$. Если $y \ne y_0$, то $\delta(y, y_0) > 0$, и в точке y_0 имеет место строгий локальный минимум. Ясно, что в $O_{y_0} \cap \Omega_{y_0}(x_0)$ больше нет точек из $\mathcal{D}$, за исключением y_0.

2) Покажем, что множество $\mathcal{D}$ замкнуто в W. Пусть $y_1 \in W$ и $y_1 \notin \mathcal{D}$. В силу непрерывности функции δ множества U_1 (соотв. U_2) тех $y \in \Omega_{y_1}(x_0)$, для которых $\delta(x_0, y) > \delta(x_0, y_1)$ (соотв. $\delta(x_0, y) < \delta(x_0, y_1)$) открыты в $\Omega_{y_1}(x_0)$. В силу условия (I), записанного для y_1 вместо y_0, получаем, что $\Omega_{y_1}(x_0) \setminus (U_1 \cup U_2) = \{y_1\}$.

Это означает, что либо $U_2 \neq \varnothing$, но тогда $y_1 \in \mathcal{D}$, либо $U_1 = \varnothing$, и тогда $\delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,y)+\delta(y,y_1)$ для всех $y\in\Omega_{y_1}(x_0)$. Ясно, что тогда в $\Omega_{y_1}(x_0)$ нет точек из $\mathcal{D}$. Если $U_1\neq\varnothing$ и $U_2\neq\varnothing$, то подбирая подходящую параметризацию γ многообразия W в окрестности $\Omega_{y_1}(x_0)$, такую, что $\gamma(t_1)=y_1$, получаем для $t>t_1$ равенство $\delta(x_0,\gamma(t))=\delta(x_0,y_1)+\delta(y_1,\gamma(t))$, а для $t<t_1$ равенство $\delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(y_1,\gamma(t))$. При этом в $\Omega_{y_1}(x_0)$ опять нет точек из $\mathcal{D}$. Таким образом, $W\setminus\mathcal{D}$ открыто в W, а $\mathcal{D}$ замкнуто. Так как W замкнуто, а значит, и компактно, то компактно и $\mathcal{D}$. Следовательно, $\mathcal{D}$ конечно.

Если $\Omega'_{y_0}(x_0)$ и $\Omega''_{y_0}(x_0)$ – такие окрестности точки $y_0\in W$, для которых выполняется условие (I), то оно выполняется и в объединении $\Omega'_{y_0}(x_0)\cup\Omega''_{y_0}(x_0)$. Отсюда следует, что существует максимальная окрестность $\mathcal{E}_{y_0}(x_0)$ точки $y_0\in W$, для которой выполняется (I). В силу непрерывности функции δ окрестность $\mathcal{E}_{y_0}(x_0)$ можно считать замкнутой. Будем выбирать ее вдобавок и связной.

П р е д л о ж е н и е 2. Окрестности $\mathcal{E}_{y_0}(x_0)$, где $y_0\in\mathcal{D}$, образуют покрытие многообразия W.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного, что существует $y_1\in W$, не принадлежащая ни одной окрестности $\mathcal{E}_{y_0}(x_0)$ для $y_0\in\mathcal{D}$. Так как $y_1\notin\mathcal{D}$, то условие $\delta(x_0,y)=\delta(x_0,y_1)+\delta(y_1,y)$ при всех $y\in\mathcal{E}_{y_1}(x_0)$ не выполняется. Так как W – многообразие размерности I, то его связная компонента, содержащая y_1, гомеоморфна или интервалу из $\mathbb{R}$, или окружности. В обоих случаях существует глобальное параметрическое представление этой компоненты. Очевидно, что $\mathcal{E}_{y_1}(x_0)$ содержится в этой компоненте, т.е. достаточно считать W связным.

Рассуждая, как и в доказательстве предложения I, получим, что условие $\delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(\gamma(t),y_1)$ выполняется либо для $t<t_1$, либо для $t>t_1$, либо для всех t из некоторой окрестности точки t_1, где $\gamma(t_1)=y_1$. Пусть, например, оно выполняется для всех $t<t_1$ из такой окрестности. Обозначим

$$\bar t = \inf\{t\le t_1 \mid \delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(y_1,\gamma(t))\},\ \bar y=\gamma(\bar t).$$

Ясно, что $\bar y\in\mathcal{E}_{y_1}(x_0)$. При этом выполняется условие

$$\delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,\bar y)+\delta(\bar y,y_1). \qquad (2)$$

В свою очередь, $\bar y$ обладает окрестностью $\mathcal{E}_{\bar y}(x_0)$. Если для $t<\bar t$ выполняется $\delta(x_0,\bar y)=\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(\bar y,\gamma(t))$, то тогда

$$\delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(\bar y,\gamma(t))+\delta(y_1,\bar y)\geqslant\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(y_1,\gamma(t)).$$

Так как обратное неравенство выполняется всегда, то получаем равенство $\delta(x_0,y_1)=\delta(x_0,\gamma(t))+\delta(y_1,\gamma(t))$ для $t<\bar t$, что противоречит определению $\bar t$. Значит, для $t<\bar t$ имеем

$$\delta(x_0,\gamma(t))=\delta(x_0,\bar y)+\delta(\bar y,\gamma(t))>\delta(x_0,\bar y)$$

Если $\bar t<t<t_1$, то очевидно, что $\delta(y_1,\bar y)>\delta(y_1,\gamma(t))$ и тогда

$$\delta(x_0,\gamma(t))=\delta(x_0,y_1)-\delta(\gamma(t),y_1)=\delta(x_0,\bar y)+\delta(\bar y,y_1)-\delta(\gamma(t),y_1)>\delta(x_0,\bar y).$$

Это означает, что $\bar y\in\mathcal{D}$. Из равенства (2) следует, что $y_1\in\mathcal{E}_{\bar y}(x_0)$. Это противоречие доказывает утверждение.

Суммируя предыдущие результаты, получаем следующее

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть W – замкнутое интегральное многообразие одного из векторных полей X_i, $x_0\in V$. Тогда существует конечное множество $\mathcal{D}$ точек из W, такое, что для любого $z\in\mathcal{D}$ существует замкнутая окрестность $\mathcal{E}_z(x_0)$ в W со следующими свойствами: I) окрестности $\mathcal{E}_z(x_0)$, где $z\in\mathcal{D}$, образуют покрытие W; 2) для всякого $y\in\mathcal{E}_z(x_0)$ справедливо равенство

$$\delta(x_0,y)=\delta(x_0,z)+\delta(z,y).$$

Библиографический список

I. А л е ш н и к о в С.И. О метриках на гладком многообразии, связанных с динамическими полисистемами специального вида // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.2I. С.5-7.

2. А л е ш н и к о в С.И. Один способ метризации орбиты динамической полисистемы на многообразии // Там же, 199I. Вып. 22. С.5-I0.

3. А л е ш н и к о в С.И. Некоторые свойства метрик на гладком многообразии, связанных с динамическими полисистемами // Там же, 1994. Вып.25. С.8-II.