Для интегрируемой почти кватернионной структуры все канонические почти кватернионные связности симметричны и совпадают.

Для многообразий с частично интегрируемой или не интегрируемой почти кватернионной структурой почти кватернионные связности не симметричны.

Многообразия с частично интегрируемой почти кватернионной структурой, для которых $\underset{(\varphi)}{N}{}^{J}_{KL}=0$, $\underset{(\psi)}{N}{}^{J}_{KL}\neq 0$, характеризуются тем, что на них существует почти кватернионная связность с тензором кручения A^{J}_{JK}, индуцирующая в слоях $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{2k}$ плоскую тангенциальную, а в слоях $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{2k}$ плоскую нормальную связности.

Библиографический список

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М., 1979.Т.9.С.5-247.

2. Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М., 1983.Т.13.С.27-76.

3. Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\epsilon)$ - антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры// Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М. 1983. Т.13.С.77-117.

4. Остиану Н.М., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально - геометрическими структурами. I. // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979.С.3-64.

5. Остиану Н.М. Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемом многообразии // Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М., 1977.Т.8.С.89-111.

УДК 514.73

РИМАНОВЫ G - СТРУКТУРЫ КЛАССА $\mathcal{E}_1$

А.А.Ермолицкий
(Белорусский технологический институт)

Пусть M многообразие класса C^∞, B_G -некоторая G - структура на M. В классе сопряженных с B_G структур найдется структура, пусть сама B_G, для которой максимальная комактная подгруппа H является подгруппой в $O(n)$. Рассматривая расширение B_H до группы $O(n)$, получаем расслоение $O(M)$, определяющее риманову метрику $g=\langle,\rangle$ на M. Пусть $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{h}$ -алгебры Ли групп Ли $O(n)$ и H, тогда $\mathfrak{O}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}=\mathfrak{h}^\perp$ относительно метрики Киллинга и в силу биинвариантности метрики $ad(H)\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Если ω - $\mathfrak{O}$-значная форма римановой связности метрики g, то $\bar{\omega}=\omega|_{\mathfrak{h}}$ задает некоторую связность в B_H [1]. Связности ω, $\bar{\omega}$ могут быть расширены до линейных связностей на M с ковариантными производными ∇, $\bar{\nabla}$.

Определение 2. Вторым фундаментальным тензором (B_H, g) назовем тензор $h=\nabla-\bar{\nabla}$; (B_H, g) назовем особой, если $h=0$.

Пусть $h_{XYZ}=\langle h_X Y,Z\rangle$, $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$.

1.Определение. Будем говорить, что структура (B_H,g) принадлежит классу $\mathcal{E}_1$, если $h_{XYZ}=\langle X,Y\rangle\beta(Z)-\langle X,Z\rangle\beta(Y)$, β -ненулевая 1-форма на M.

Из соотношения $\langle\xi,X\rangle=\beta(X)$ определяется ненулевое векторное поле ξ на M и

$$h_X Y=\langle X,Y\rangle\xi-\langle\xi,Y\rangle X,\quad X,Y,\xi\in\mathfrak{X}(M). \qquad (1)$$

Отметим, что метрическая связность $\bar{\nabla}$ в этом случае называется связностью Лира [3] и ее кручение имеет вид:

$$\bar{T}(X,Y)=\langle\xi,Y\rangle X-\langle\xi,X\rangle Y.$$

Пусть $L=L(\xi)$-одномерное распределение на M, порожденное полем ξ, $V=L^\perp$. Возникает структура почти произведения:

$$TM = L + V. \qquad (2)$$

П р е д л о ж е н и е 1. Структура почти произведения (2) инвариантна относительно связности $\overline{\nabla}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in M$, $\mathfrak{z} = \|\xi\|^{-1}\xi$, $\{p;\ \mathfrak{z} = e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\} = u \in O(M)$, $\bar{e}_0, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{n-1} \in \bar{Q}_u = (Ker\,\overline{\omega})_u$ такие, что $\pi_*(\bar{e}_i) = \bar{e}_i$, $i = 0, \ldots, n-1$ (π -каноническая проекция). Тогда $h_{e_i} e_j = u\tau(\bar{e}_i)u^{-1}e_j$, где $\tau = \omega - \overline{\omega}$. Из (1), учитывая, что u - изометрия, получаем, что

$$\tau(\bar{e}_i) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \ldots \|\xi\| \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ -\|\xi\| & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right] \in \mathfrak{m}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \ \tau(\bar{e}_0) = [0].$$

Линейная оболочка $\{\tau(\bar{e}_i)\}$ образует пространство

$$\mathfrak{m}_0 = \left\{\left[\begin{array}{cc} 0 & b \\ \hline -b & 0 \end{array}\right]\right\} \subset \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{m}_0^{\perp} = \left\{\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & A \end{array}\right]\right\}.$$

Так как $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_0$ и H является подгруппой в $K = 1 \times O(n-1)$, то есть $H = 1 \times \widetilde{H}$. Параллельный перенос в связности $\overline{\nabla}$ оставляет B_H, а следовательно, и B_K инвариантной. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. Распределение $p \longrightarrow V_p$ интегрируемо.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X, Y \in V$, $X \perp Y$. Из (1) $h_X Y \in V$, $h_Y X \in V$. По предложению 1 $\overline{\nabla}_X Y \in V$, $\overline{\nabla}_Y X \in V$, следовательно, $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + h_X Y \in V$, $\nabla_Y X = \overline{\nabla}_Y X + h_Y X \in V$ и $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \in V$. Учитывая, что любое поле из V можно разложить по ортонормированным, получаем, что V интегрируемо по теореме Фробениуса. Предложение доказано.

Таким образом, на M возникает слоение коразмерности 1 максимальных интегральных многообразий распределения V. Пусть $p \in M$ и $\widetilde{M}$ -слой этого слоения, проходящий через p, $\widetilde{\nabla}$ - риманова связность на $\widetilde{M}$.

Л е м м а 3. На $\widetilde{M}: \widetilde{\nabla} = \overline{\nabla}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, тогда по формуле (1)

$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle \nabla_X Y, \mathfrak{z} \rangle \mathfrak{z} = \nabla_X Y - \langle h_X Y, \mathfrak{z} \rangle \mathfrak{z} = \nabla_X Y - \langle X, Y \rangle \|\xi\| \mathfrak{z} = \nabla_X Y - \langle X, Y \rangle \xi = \overline{\nabla}_X Y$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что вторая квадратичная форма подмногообразия имеет вид:

$$\alpha(X,Y) = -\langle X,Y \rangle \xi, \ X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}). \qquad (3)$$

Пусть R, $\widetilde{R}$ -тензоры кривизны связностей ∇, $\widetilde{\nabla}$. Из (3) и уравнения Гаусса [1] сразу следует

П р е д л о ж е н и е 4. $R(X,Y,Z,U) = \widetilde{R}(X,Y,Z,U) + \|\xi\|^2(\langle Y,Z \rangle \langle X,U \rangle - \langle X,Z \rangle \langle Y,U \rangle)$, $X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}(M)$.

Т е о р е м а 5. Структура (B_H, g) индуцирует особую структуру $(B_{\widetilde{H}}, \widetilde{g})$ на $\widetilde{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. B_H допускает редукцию к расслоению голономии связности $\overline{\nabla}$ [1], поэтому без ограничения общности можно считать, что B_H и является расслоением голономии. По предложению 1 $\overline{\nabla}$ оставляет V инвариантным, следовательно, можно рассмотреть расслоение голономии $B_{\widetilde{H}}$ связности $\overline{\nabla}|_{\widetilde{M}}$ на $\widetilde{M}$. По лемме 3 $\overline{\nabla} = \widetilde{\nabla}$ на $\widetilde{M}$, поэтому $B_{\widetilde{H}}$ является расслоением голономии римановой связности $\widetilde{\nabla}$ на $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, и индуцированная связность $\overline{\widetilde{\omega}}$ в $B_{\widetilde{H}}$ совпадает с $\widetilde{\omega}$ ($\widetilde{\omega}$ -форма связности $\widetilde{\nabla}$). Таким образом, $\widetilde{h} = 0$ на $\widetilde{M}$ и структура $(B_{\widetilde{H}}, \widetilde{g})$ -особая. Теорема доказана.

2. Предположим, что $\|\xi\| = C$ ($C - const$) на M.

П р е д л о ж е н и е 6. $\|\xi\| = C$ тогда и только тогда, когда $\overline{\nabla} h = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $\|\xi\| = C$ тогда и только тогда, когда $\overline{\nabla}_X \xi = C \overline{\nabla}_X \mathfrak{z} = 0$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Пусть $p = \gamma(0) \in M$ и $\gamma(t)$ - интегральная кривая поля X; Y, Z получены параллельным переносом вдоль этой кривой, т.е. $\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Z = 0$. Тогда

$$(\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) = \overline{\nabla}_X h(Y,Z) = \overline{\nabla}_X (\langle Y,Z \rangle \xi - \langle \xi, Z \rangle Y) = \langle Y,Z \rangle \overline{\nabla}_X \xi + \langle \overline{\nabla}_X \xi, Z \rangle Y.$$

Предложение доказано.

Если выполняются условия $\overline{\nabla} h = 0$, $\overline{\nabla} \overline{R} = 0$, то по теореме Амброуза-Сингера [4],[5] M является локально-однородным римановым пространством. В этом случае h называется однородной римановой структурой (о.р.с.) на M.

Т е о р е м а 7. Если $\|\xi\| = C$ на M, то (M, g) локально изометрично $\mathbb{R} \times \widetilde{M}$ с метрикой $ds^2 = c^2 dt^2 + e^{-cdt} \tilde{g}$, где $\tilde{g}$ -индуцированная метрика на $\widetilde{M}$, $dt(\xi) = 1$.

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства, приведенного в [5], для случая, когда h -о.р.с.

Пусть h' -о.р.с. на M. Оказывается, что все нетривиальные о.р.с. на поверхностях имеют вид (I).

Т е о р е м а 8 [5]. I/ Пусть (M, g) -связное и h -о.р.с. типа $\mathcal{C}_1$ на M. Тогда M имеет постоянную отрицательную кривизну. 2/Пусть (M, g) -связное, полное и односвязное. M допускает ненулевую о.р.с. типа $\mathcal{C}_1$ тогда и только тогда, когда (M, g) изометрично гиперболическому пространству H^n.

П р и м е р. Если h -о.р.с. типа $\mathcal{C}_1$ на M и $\overline{\nabla} = \nabla - h$ каноническая связность на M, то расслоение голономии связности $\overline{\nabla}$ дает пример G -структуры, принадлежащей классу $\mathcal{C}_1$.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, I98I. Т.I, 2.

2. Е р м о л и ц к и й А.А. Вторая квадратичная форма G -структуры и близко особые структуры // Докл.Болг.АН. I98I. Т.34. № 7. С.963-964.

3. Nicolescu L. Sur la géométrie de l'algebre associel á un champ tensoriel du type (1.2) // Tensor. 1982. V. 38. P. 235-241.

4. К о в а л ь с к и й О. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984.

5. Tricerri F., Vanhecke L. Homogeneous structures on Riemannian manifolds. London Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 83: 1983.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I9 1988

УДК 514.75

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СТРУКТУРАХ ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Е.Т. И в л е в
(Томский политехнический институт)

В статье строятся инвариантные структуры почти произведения пространства аффинной связности $A_{n,n}$, определяемые с помощью тензора кручения-кривизны этой связности.

Все встречающиеся в работе функции предполагаются аналитическими. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [I] - [8].

I. Рассматривается пространство $A_{n,n}$ с аффинной связностью C, которое, как известно [I] при $m = n$, является 2-мерным расслоенным пространством с n-мерной дифференцируемой базой $\mathfrak{M}_n$ и n-мерными аффинными слоями A_n. Будем предполагать, что для пространства $A_{n,n}$ будут иметь место результаты, изложенные в пункте I статьи [I] (при $m = n$). При этом в формулах (I)-(3) этой статьи все индексы $i, j, k, \ell, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \mu$ будем считать изменяющимися от I до n. В дальнейшем символом ([k], (S)) будем обозначать формулу под номером S статьи [k].

2. Будем говорить, что в аффинном расслоении $A_{n,n}$ задана структура почти произведения [2, с.185-187] или композиция А.П.Нордена $(\tau, n-\tau)^7$ в смысле [3], если на базе этого расслоения заданы два поля геометрических объектов [5]:

$$a_p = \{ a^{\beta_q}_{\alpha_p} \}, \quad \nabla a^{\beta_q}_{\alpha_p} + \omega^{\beta_q}_{\alpha_p} + a^{\gamma_q}_{\alpha_p} a^{\beta_q}_{\beta_p} \omega^{\beta_p}_{\gamma_q} = a^{\beta_q}_{\alpha_p i} \omega^i$$

$$(p, q = 1,2; \; p \neq q, \; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \sigma_1, \tau_1 = \overline{1,\tau} < n; \; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \tau_2 = \overline{\tau+1, n}). \qquad (I)$$

Геометрически объекты (I) каждой точке $(u) \in \mathfrak{M}_n$ в слое $A_n(u)$ сопоставляют линейные подпространства L^p: $L^1 \cap L^2 = A$, $L^1 \cup L^2 = A_n$, $\dim L^1 = \tau$, $\dim L^2 = n - \tau$, которые в слоевых аффинных координатах определяются уравнениями соответственно:

$$L^p: \; x^{\beta_q} = a^{\beta_q}_{\alpha_p} x^{\alpha_p}. \qquad (2)$$