а вершина A_3 является точкой пересечения касательных плоскостей к двумерному многообразию (A_4) и двумерному многообразию π_{P^*}, возникающему на трехмерной поверхности (P) при фиксации точки P^* на линии (P^*).

Осуществляя замыкание системы (2), убеждаемся, что она – в инволюции и определяет конгруэнцию $(PP^*)_{3,1}$ с произволом семи функций трех аргументов.

Исследуем некоторые подклассы конгруэнции $(PP^*)_{3,1}$.

Определение 1. Конгруэнцией K_1 называется такая конгруэнция $(PP^*)_{3,1}$, для которой каждой фиксированной точке P^* на линии (P^*) соответствует торс на гиперповерхности (P).

Найдем условия, при которых гиперповерхность (P) расслаивается на торсы. Касательная к линии (P^*) в точке P^* определяется точками A_4 и A_5, т.к. $dA_5 = \theta_3 A_4 + \omega_5^5 A_5$. Точка $P^* = A_5$ фиксируется при $\theta_3 = 0$. Асимптотические направления на гиперповерхности (P) вдоль $\theta_3 = 0$ определяются уравнением:

$$\lambda^{11}\theta_1^2 + 2\lambda^{12}\theta_1\theta_2 + \lambda^{22}\theta_2^2 = 0 .$$

Если двумерная поверхность на гиперповерхности (P) – торс, то

$$\begin{vmatrix} \lambda^{11} & \lambda^{12} \\ \lambda^{12} & \lambda^{22} \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^{11}\lambda^{22} = (\lambda^{12})^2. \qquad (3)$$

Задача имеет решение в следующих случаях:

1) $\lambda^{11} = 0$, $\lambda^{22} \neq 0$, $\lambda^{12} = 0$ (4)

(либо $\lambda^{11} \neq 0$, $\lambda^{22} = 0$, $\lambda^{12} = 0$), тогда условия (3) принимают вид: $\theta_2^2 = 0$ $(\theta_1^2 = 0)$, т.е. на двумерной поверхности π_{P^*} имеется единственное семейство асимптотических линий – прямолинейных образующих торсов;

2) $\lambda^{11} \neq 0$, $\lambda^{22} \neq 0$, $\lambda^{12} \neq 0$, обозначая $\dfrac{\lambda^{11}}{\lambda^{12}} = \dfrac{\lambda^{12}}{\lambda^{22}} = t$, имеем:

$$\lambda^{11} = t\lambda^{12}, \quad \lambda^{22} = \frac{1}{t}\lambda^{12}, \qquad (5)$$

т.е. (4) и (5) – условия расслоения гиперповерхности (P) на торсы.

Конгруэнции K_1 определяются системой уравнений (2), в которой учтены условия (4), либо (5). Замкнутая система (2) – в инволюции и определяет конгруэнции K_1 с произволом семи функций трех аргументов.

Определение 2. Конгруэнцией K_2 называется такая конгруэнция $(PP^*)_{3,1}$, для которой двумерная поверхность π_{P^*},

возникающая на гиперповерхности (P) при фиксации точки P^* на линии (P^*), является плоскостью.

Касательная плоскость к двумерной поверхности на гиперповерхности (P) определяется точками $P = A_1$, A_2 и A_3, т.к. $dA_1|_{\theta_3=0} = \omega_1^1 A_1 + \theta_1 A_2 + \theta_2 A_3$. Если эта двумерная поверхность – плоскость, то

$$dA_2|_{\theta_3=0} = (\ldots)A_1 + (\ldots)A_2 + (\ldots)A_3, \quad dA_3|_{\theta_3=0} = (\ldots)A_1 + (\ldots)A_2 + (\ldots)A_3$$

Откуда условие расслоения трехмерной поверхности (P) на плоскости примет вид

$$p^{11} = p^{12} = p^{22} = \lambda^{11} = \lambda^{12} = \lambda^{22} = 0 . \qquad (6)$$

Конгруэнция K_2 определяется системой уравнений (2), в которой учтены условия (6). Замкнутая система уравнений (2) имеет общее решение с произволом четырех функций трех аргументов.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1973. Вып.3. С. 41-49.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Е.Ю. Бусуркина

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции невырожденных кривых второго порядка (коник) с кратными фокальными поверхностями, причем плоскости коник описывают двупараметрическое семейство. Найдены условия m-кратности $(m = \overline{1,6})$ одной фокальной поверхности, исследованы некоторые классы конгруэнции коник с одной, двумя и тремя кратными фокальными поверхностями.

Пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ $(\alpha, \beta, \gamma = \overline{0,3})$, где ω_α^β – линейные дифференциальные формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_\alpha^\alpha=0$.

Определение I. Конгруэнцией V_m называется конгруэнция невырожденных кривых второго порядка (коник) с одной m-кратной $(m=\overline{1,6})$ фокальной поверхностью.

Поместим вершины репера A_1 и A_2 на конику, A_3 – в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C, тогда она задается уравнениями

$$x^0=0\ ,\quad f\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0\ . \tag{I}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции коник имеет вид:

$$\omega_3^0=0\ ,\quad \omega_i^j=a_i^k\,\omega_k\ ,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=m^k\omega_k\ ,$$
$$\omega_3^i-\omega_j^3=c_j^k\,\omega_k\ ,\ (\omega_i\overset{def}{=}\omega_i^0)\ ,$$

где $i,j,k=1,2$, по i и j суммирование не производится, $i\neq j$.

Фокальные точки и фокальные направления определяются уравнениями (I) и следующим:

$$x^k\omega_k+x^3(a^k\omega_k)=0\ ,$$
$$(x^1)^2(a_1^k\omega_k)+(x^2)^2(a_2^k\omega_k)+x^1x^2(m^k\omega_k)+x^1x^3(c_1^k\,\omega_k)+x^2x^3(c_2^k\omega_k)=0\ .$$

Запишем условие m-кратности $(m=\overline{1,6})$ для фокальной точки A_1:

$$a_1^2=0\ , \tag{2}$$
$$a_1^1a^2-c_1^2=0\ , \tag{3}$$
$$a_1^1+2c_1^1a^2-m^2-2c_1^2a^1=0\ , \tag{4}$$
$$c_1^1+m^1a^2-c_2^2-m^2a^1=0\ , \tag{5}$$
$$m^1+2c_2^1a^2-a_2^2-2c_2^2a^1=0\ , \tag{6}$$
$$c_2^1+a_2^1a^2-a_2^2a^1=0\ . \tag{7}$$

Предполагается, что условием однократности является условие (2), двукратности – условия (2), (3), трехкратности – (2) – (4) и т.д., условиями шестикратности – (2) – (7).

Кононизацию репера продолжим следующим образом: точку A_3 поместим в характеристическую точку плоскости коники, A_0 – в присоединенную точку коники [1]. При этом из рассмотрения исключается случай, когда характеристическая точка принадлежит конике. Тогда уравнения коники (1) сохранятся, система уравнений Пфаффа конгруэнции коник принимает вид

$$\omega_3^0=0,\quad \omega_i^j=a_i^j\,\omega_j,\quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=m^k\omega_k\ ,$$

$$\omega_3^i-\omega_j^3=c_j^k\,\omega_k\ ,\quad \omega_3^i=\omega_i+n\omega_j\ ,\ \omega_0^a=q^{ak}\omega_k\ ,$$
$$2\omega_i^i-\omega_0^0-\omega_3^3-a_j^i\,\omega_j=p_i^k\,\omega_k\ ,\quad dn+n(\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3)=p_1^2\omega_1+p_2^1\omega_2\ ,$$

где $n=\frac{1}{2}(c_1^1+c_2^2)$; $a,b=1,2,3$.

Условия (2) – (7) преобразуются к виду:

$$a_1^2=0\ ,\quad c_1^2=0\ ,\quad m^2=0\ ,\quad c_1^1=c_2^2\ ,\ m^1=0\ ,\ c_2^1=0\ . \tag{8}$$

Конгруэнции V_m существуют и определяются с произволом $7-m$ функций двух аргументов и обладают следующими свойствами: I) вершины репера A_1 и A_3 конгруэнций V_m являются фокусами луча A_1A_3 прямолинейной конгруэнции (A_1A_3); 2) для конгруэнций V_4, V_5, V_6 вершины репера A_1 и A_2 гармонически разделяются фокусами прямолинейной конгруэнции (A_1A_2), а касательные к линиям $\omega_i=0$ на поверхностях (A_j) пересекаются в точке A_0.

Определение 2. Конгруэнцией V_6^0 называется конгруэнция V_6, у которой поверхность (A_0) вырождается в точку.

Конгруэнция V_6^0 выделяется условиями (8) и вполне интегрируемой подсистемой $\omega_0^a=0$, она определяется с произволом четырех функций одного аргумента.

Теорема I. Конгруэнция V_6^0 обладает следующими свойствами: I) прямолинейная конгруэнция (A_1A_0) имеет один сдвоенный фокус луча A_1A_0; 2) торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_3), (A_2A_3), (A_0A_3) соответствуют линиям координатной сети; 3) фокальная поверхность (A_1) является торсом; 4) координатная сеть на поверхности (A_3) сопряжена.

Определение 3. Конгруэнцией V_4^* называется конгруэнция V_4, у которой координатная сеть на фокальной поверхности (A_1) сопряжена.

Конгруэнция V_4^* выделяется условиями (8_1) – (8_4), $q^{21}=1$, $n=0$ и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Теорема 2. Для конгруэнции V_4^* характерны следующие геометрические свойства: I) асимптотические линии на поверхностях (A_1) и (A_3) соответствуют, 2) торсы прямолинейной конгруэнции (A_1A_3) соответствуют линиям координатной сети.

Определение 4. Конгруэнцией $V_{m,n}$ называется конгруэнция коник с m-кратной поверхностью (A_1) и n-кратной поверхностью (A_2), причем $m+n=6$.

Случай $V_{3,3}$ изучен В.С.Малаховским [1]. В силу симметрии осталось рассмотреть конгруэнции $V_{5,1}$ и $V_{4,2}$. Конгруэнция $V_{5,1}$ выделяется условиями (8_1) – (8_5), $a_2^1=0$. Она существует и определяется с произволом семи функций одного аргумента. Конгруэнция $V_{4,2}$ определяется соотношениями (8_1) - (8_4), $a_2^1=0$, $c_2^1=0$ и имеет произвол существования две функции двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 5. Конгруэнцией $V_{3(2)}$ называется конгруэнция коник с тремя двукратными фокальными поверхностями.

Для исследования этого класса осуществим канонизацию репера следующим образом: вершины A_1, A_2, A_3 поместим в двукратные фокальные точки коники, а вершину A_0 - в точку пересечения касательных плоскостей к фокальным поверхностям $(A_1), (A_2), (A_3)$; предполагается, что фокальные поверхности не вырождаются. Уравнения коники C имеют вид:

$$x^0=0, \quad F \equiv x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3=0.$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $V_{3(2)}$ записывается следующим образом:

$$\omega_3^0 = a^k\omega_k, \quad \omega_1^2+\omega_1^3=0, \quad \omega_2^1+\omega_2^3=0, \quad \omega_3^1+\omega_3^2=0,$$
$$\omega_1^2 = m^{1k}\omega_k, \quad \omega_2^1 = m^{2k}\omega_k, \quad \omega_3^2 = m^{3k}\omega_k,$$
$$\omega_3^3-\omega_j^j+2\omega_i^i+\omega_3^j-\omega_j^3 = c^{ii}\omega_i, \quad \omega_0^a = n^{ak}\omega_k,$$

где $\quad c^{11}a^2-c^{22}a^1=0, \quad \omega_i \overset{def}{=} \omega_i^0.$

Конгруэнция $V_{3(2)}$ существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986. 72 с.

2. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы конгруэнций коник в P_3 с плоскими фокальными поверхностями // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1970. Вып.1. С.72-77.

УДК 514.75

О НОРМАЛЯХ НОРДЕНА-ЧАКМАЗЯНА КАСАТЕЛЬНО (r,ℓ)-ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Ю.В о л к о в а

(Калининградское ВВМУ)

Продолжается изучение регулярной касательно (r,ℓ)-оснащенной гиперполосы проективного пространства [1] в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Найдены поля основных и нормальных квазитензоров Λ-подрасслоения и L-подрасслоения касательно оснащающих плоскостей, ассоциированных с данной гиперполосой SH_m. Получены новые поля основных и нормальных квазитензоров гиперполосы SH_m. Введены двойственные нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна Λ-подрасслоения и L-подрасслоения касательно оснащающих плоскостей гиперполосы SH_m, а также самой гиперполосы SH_m.

Во всей работе придерживаемся следующей схемы индексов:

$$\mathcal{J},\mathcal{K},\mathcal{L},\ldots=\overline{1,n}; \quad \bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}},\bar{\mathcal{L}},\ldots=\overline{0,n}; \quad p,q,s,t=\overline{1,r};$$
$$i,j,k,\ell=\overline{r+1,m}; \quad \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}; \quad a,b,c,d=\overline{1,m}.$$

Оператор дифференцирования ∇ действует по закону:

$$\nabla T_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} = dT_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}} - T_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}} + T_{\mathcal{J}}^{\mathcal{L}}\omega_{\mathcal{L}}^{\mathcal{K}}.$$

Символ δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам, а значения форм $\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}$ при фиксированных главных параметрах обозначаются $\pi_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}$. В этом случае оператор ∇ обозначается символом ∇_δ.

Символ " $\equiv$ " обозначает сравнение по модулю базисных форм $\{\omega^b\}$.

§ 1. Основные квазитензоры гиперполосы SH_m

1. Известно [1], что касательно (r,ℓ)-оснащенная гиперполоса SH_m в репере первого порядка R^1 задается уравнениями:

$$\begin{cases} \omega_p^n=\Lambda_{pq}\omega^q, & \omega_i^n=L_{ij}\omega^j, & \omega_p^\alpha=\Lambda_{pq}^\alpha\omega^q, \\ \omega_i^\alpha=L_{ij}^\alpha\omega^j, & \omega_\alpha^a=N_{\alpha b}^a\omega^b, & \omega_i^p=L_{ib}^p\omega^b, \\ & \omega_p^i=\Lambda_{pb}^i\omega^b. & \end{cases} \qquad (1.1)$$