ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Л.Г.Корсакова

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3.

В трехмерном проективном пространстве исследуются расслояемые пары конгруэнций коник [I] общего положения. Доказана теорема существования таких расслояемых пар и изучены их геометрические свойства.

§I. Система дифференциальных уравнений расслояемых пар конгруэнций коник.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1, C_2) конгруэнций $(C_1), (C_2)$ коник, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей.

Отнесем пространство P_3 к геометрически фиксированному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где A_i – одна из точек пересечения коники C_j с прямой ℓ $(i, j, k = 1,2;\ i \neq j)$, A_3 и A_4 – полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4), \tag{1.1}$$

причем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0 . \tag{1.3}$$

Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R (при соответствующей нормировке вершин A_α) будут иметь вид:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1 x^2 = 0 , \quad x^4 = 0 ; \tag{1.4}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1 x^2 = 0 , \quad x^3 = 0 . \tag{1.5}$$

Рассмотрим общий случай, когда плоскости коник C_1 и C_2 образуют двупараметрические семейства, тогда ранг каждой из систем форм $\{\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_4^3\}$, $\{\omega_1^4, \omega_2^4, \omega_3^4\}$ равен двум.

Пусть

$$\omega_1^4 \wedge \omega_2^4 \neq 0 . \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\omega_i^4 = \omega_i . \tag{1.7}$$

Система пфаффовых уравнений пары (C_1, C_2) запишется в виде

$$\omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k , \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k , \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k ,$$

$$\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k , \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k , \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k , \tag{1.8}$$

$$\Theta_i = A_i^k \omega_k , \quad \Omega_i = b_i^k \omega_k ,$$

где

$$\Theta_i = da_i - a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}) , \quad \Omega_i = \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2} .$$

(по i, j не суммировать!)

Как известно [I, с.2II], пара (C_1, C_2) называется расслояемой, если существуют односторонние расслоения от конгруэнций (C_1) и (C_2) коник к конгруэнции (A_3A_4) прямых, инцидентных полюсам прямой ℓ относительно C_1 и C_2.

Система квадратичных уравнений, характеризующая расслоение от конгруэнции (C_1) к конгруэнции (A_3A_4), имеет вид [I, с.2II-2I2]:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad (a_1)^2 \omega_3^2 \wedge \omega_3^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0, \quad (a_1\Theta_1 - \omega_1^2) \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2 \omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \tag{1.9}$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1\Theta_1 \wedge \omega_3^1 + (a_1)^2(\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0 .$$

Квадратичные уравнения, определяющие расслоение от конгруэнции (C_2) к конгруэнции (A_3A_4), получаются из уравнений (I.9) подстановкой индексов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

Они имеют вид:

$$\omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0,\ \omega_1 \wedge \omega_4^2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0,\ (a_2)^2 \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 = 0,\ (a_2\theta_2 - \omega_2^1) \wedge \omega_4^1 + (a_2)^2 \omega_4^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$2\omega_4^2 \wedge \omega_4^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \qquad (1.11)$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_4^3 \wedge \omega_3^1 + a_2\theta_2 \wedge \omega_4^2 + (a_2)^2 (\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_1^2) = 0.$$

Сравнивая (I.9) с (I.II), убеждаемся, что

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0, \qquad (1.12)$$

$$a_1 m = 0,\quad a_2 m = 0, \qquad (1.13)$$

где

$$m^2 = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{12}\Gamma_3^{21}. \qquad (1.14)$$

Многообразие расслояемых пар (C_1, C_2) разбивается на два типа: многообразия, для которых $m \neq 0$, и многообразия, для которых $m = 0$. Если $m \neq 0$, то из уравнений (I.I3) следует, что $a_1 = a_2 = 0$, т. е в этом случае коники пересекаются в точках A_i. Исключая из рассмотрения многообразия этого типа, мы рассмотрим случай, когда

$$m = 0.$$

Пары конгруэнций такого типа назовем парами M. Пары M определяются системой пфаффовых уравнений (I.8), их замыканиями и следующими квадратичными уравнениями:

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = 0,\ \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0,\ \omega_3^1 \wedge \omega_2^1 = 0,\ \omega_4^2 \wedge \omega_1^2 = 0,$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0,\ \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0, \qquad (1.15)$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^2 + a_1\theta_1 \wedge \omega_3^1 + (a_1)^2 (\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1) = 0,$$

$$\Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_3^4 \wedge \omega_4^1 = 0,\ \Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^1 \wedge \omega_1^2 - 2\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 = 0,$$

$$(a_1\theta_1 - \omega_1^2) \wedge \omega_3^2 + (a_1)^2 \omega_3^4 \wedge \omega_4^2 = 0,\ (a_2\theta_2 - \omega_2^1) \wedge \omega_4^1 + (a_2)^2 \omega_4^3 \wedge \omega_3^1 = 0,$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 - 2\omega_4^3 \wedge \omega_3^1 + a_2\theta_2 \wedge \omega_4^2 + (a_2)^2 (\omega_4^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_1^2) = 0.$$

Т е о р е м а I. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с парой M, образуют односторонне расслояемую пару (от конгруэнции (A_1A_2) к конгруэнции (A_3A_4))

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичные уравнения

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2 \wedge \omega_4^1 = 0,\ \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0,$$

характеризующие расслоение от конгруэнции (A_1A_2) к (A_3, A_4), [2, с.67] содержатся в системе (I.I5), что и доказывает теорему.

Перейдем к исследованию системы квадратичных уравнений (I.I5). Поскольку семейство (A_3A_4) прямых A_3A_4 – конгруэнция, то

$$\operatorname{rang}(\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2) = 2. \qquad (1.16)$$

Учитывая возможность изменения нумерации вершин репера и условие (I.I6), выделяются следующие проективно неэквивалентные пары M:

I	$\omega_3^1\,\omega_3^2\,\omega_4^1\,\omega_4^2 \neq 0;$	(1.17)
II	$\omega_4^2 = 0,\quad \omega_3^1\,\omega_3^2\,\omega_4^1 \neq 0;$	(1.18)
III	$\omega_3^1 = \omega_4^2 = 0;$	(1.19)
IУ	$\omega_3^1 = \omega_4^1 = 0;$	(1.20)
У	$\omega_3^2 = \omega_4^1 = 0;$	(1.21)
УI	$\omega_4^1 = 0,\quad \omega_3^1\,\omega_3^2\,\omega_4^2 \neq 0.$	(1.22)

Пары M ,характеризуемые соответственно условиями (I.I7)-(I.22),назовем парами $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$.

§ 2. Пары M_1.

Поскольку для пар M_1 выполняется неравенство (I.I7), то пару M_1 можно определить как такую пару M ,в которой плоскости $(A_i A_3 A_4)$ не являются касательными для поверхностей (A_3) и (A_4) соответственно в точках A_3 и A_4 .

Из системы (I.I5) и условия (I.I6) следует,что

$$\omega_3^1 \wedge \omega_4^1 \neq 0 . \qquad (2.1)$$

Примем эти формы за базисные линейно независимые формы пары M_1.Обозначим

$$\omega_3^1 = \omega^1, \quad \omega_4^1 = \omega^2. \qquad (2.2)$$

Осуществляя переход к новому базису ω^i ,из системы (I.I5) будем иметь следующую систему пфаффовых и конечных уравнений пары M_1 :

$$\begin{gathered}
\omega_3^2 = \lambda_1 \omega^1, \ \omega_4^2 = \lambda_2 \omega^2, \ \omega_2^1 = \lambda_3 \omega^1, \ \omega_1^2 = \lambda_4 \omega^2, \\
\omega_2^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2 = b\omega^1 + c\omega^2, \ \omega_1^3 = l\omega_3^2 + m\omega_4^2, \\
\omega_1 = m\omega_3^2 + k\omega_4^2, \ \Omega_1 = p\omega^1 + r\omega^2, \ 2\omega_3^4 = -r\omega^1 + s\omega^2, \\
\Omega_2 = t\omega_4^2 + n\omega_3^2, \ 2\omega_4^3 = -n\omega_4^2 + v\omega_3^2, \qquad (2.3) \\
\lambda_1 a_1 \theta_1 = \mu\omega^1 + \lambda_1 \omega_1^2 - \tfrac{1}{2}(a_1)^2 r\omega_4^2, \\
a_2 \theta_2 = \psi\omega^2 + \omega_2^1 - \tfrac{1}{2}(a_2)^2 n \lambda_2 \omega^1;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
(\lambda_1 - \lambda_2)(m + b) = 0, \\
r(\lambda_1 - \lambda_2)[\lambda_1 + \tfrac{1}{2}(a_1)^2] = 0, \qquad (2.4) \\
n(\lambda_1 - \lambda_2)[1 + \tfrac{1}{2}(a_2)^2 \lambda_2] = 0 .
\end{gathered}$$

Из системы (2.4) следует,что мы имеем пять возможных случаев:

I/ $\lambda_1 = \lambda_2 = g;$ (2.5)

2/ $m + b = 0, \ r = 0, \ n = 0;$ (2,6)

3/ $r = 0, \ m + b = 0, \ 1 + \frac{1}{2}(a_2)^2 \lambda_2 = 0;$ (2.7)

4/ $n = 0, \ m + b = 0, \ \lambda_1 + \frac{1}{2}(a_1)^2 = 0;$ (2.8)

5/ $m + b = 0, \ \lambda_1 + \frac{1}{2}(a_1)^2 = 0, \ 1 + \frac{1}{2}(a_2)^2 \lambda_2 = 0.$ (2.9)

О п р е д е л е н и е. Пары M_1,для которых выполняется условие (2.5),назовем парами M_1' ,пары M_1, характеризуемые соотношениями (2.6),называются парами M_1'' .

Т е о р е м а 2. Существует только два класса пар M_1: пары M_1' ,определяемые с произволом четырех функций двух аргументов,и пары M_1'' ,определяемые с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Для доказательства покажем сначала,что случаи 3/,4/,5/ сводятся к случаю 2/. Например,исследование третьего случая приводит нас к уравнению Пфаффа

$$(a_2)^2 \omega_4^2 + 2\omega^2 = 0 ,$$

замыкание которого дает соотношение

$$n(\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

Поскольку в случае 3/$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$,то $n = 0$,т. е. пришли к условиям (2.6).Аналогичное исследование случаев 4/ и 5/ приводит нас к тем же уравнениям (2.6).

Докажем теорему существования классов M_1', M_1'' .Пары M_1' определяются уравнениями Пфаффа:

$$\begin{gathered}
\omega_3^2 = g\omega^1, \ \omega_4^2 = g\omega^2, \ \omega_2^1 = \lambda_3 \omega^1, \ \omega_1^2 = \lambda_4 \omega^2, \\
\omega_2^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \ \omega_2 = b\omega^1 + c\omega^2, \ \omega_1^3 = l\omega_3^2 + m\omega_4^2, \\
\omega_1 = m\omega_3^2 + k\omega_4^2, \ \Omega_1 = p\omega^1 + r\omega^2, \ 2\omega_3^4 = -r\omega^1 + s\omega^2, \\
\Omega_2 = t\omega_4^2 + n\omega_3^2, \ 2\omega_4^3 = -n\omega_4^2 + v\omega_3^2, \qquad (2.10)
\end{gathered}$$

$$a_1\theta_1 = \frac{\mu}{g}\omega^1 + \omega_1^2 - \frac{1}{2}(a_1)^2 \tau\omega^2, \quad a_2\theta_2 = \psi\omega^2 + \omega_2^1 - \frac{1}{2}(a_2)^2 n\omega_3^2,$$

$$dq + g(\omega_2^2 - \omega_1^1) = g^2\omega_2^1 - \omega_1^2 \qquad (2.11)$$

и их замыканиями. Пфаффово уравнение (2.II)-вполне интегрируемое. Из анализа системы (2.IO),(2.II) следует, что $S_1 = 12, S_2 = 4, Q = N = 20$, следовательно, произвол существования пар M_1' —четыре функции двух аргументов.

Пары M_1'' удовлетворяют уравнениям Пфаффа:

$$\omega_3^2 = \lambda_1\omega^1, \quad \omega_4^2 = \lambda_2\omega^2, \quad \omega_2^1 = \lambda_3\omega^1, \quad \omega_1^2 = \lambda_4\omega^2, \qquad (2.12)$$

$$\omega_2^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_2 = b\omega^1 + c\omega^2, \quad \omega_1^3 = \ell\omega_3^2 - b\omega_4^2,$$

$$\omega_1 = -b\omega_3^2 + k\omega_4^2, \quad \Omega_1 = p\omega^1, \quad 2\omega_3^4 = s\omega^2, \quad \Omega_2 = t\omega_4^2,$$

$$2\omega_4^3 = v\omega_3^2, \quad \lambda_1 a_1\theta_1 = \mu\omega^1 + \lambda_1\omega_1^2, \quad a_2\theta_2 = \psi\omega^2 + \omega_2^1.$$

Осуществляя замыкание и продолжение системы (2.I2), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Т е о р е м а 3. Пары M_1' обладают свойствами: I/характеристические точки граней $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ инцидентны соответственно прямым A_1A_4 и A_2A_3; 2/поверхности (A_3) и (A_4) являются одной и той же плоскостью (A_3A_4H), где $H = A_1 + gA_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Характеристические точки K_2 и K_1 соответственно граней $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ определяются формулами $K_2 = -gA_1 + \lambda_4 A_4$, $K_1 = A_2 - \lambda_3 A_3$, откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

2/Имеем:

$$dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 + \omega^1 H, \quad dA_4 = \omega_4^4 A_4 + \omega_4^3 A_3 + \omega^2 H,$$

причем

$$d[A_3A_4H] = (g\omega_2^1 - \omega_2^2)[A_3A_4H].$$

Следовательно, плоскость (A_3A_4H) неподвижна. Отметим, что свойство I/ справедливо и для пар M_1''.

Назовем линии, огибаемые прямыми A_3A_4 соответственно на поверхностях (A_3) и (A_4), линиями Γ_1 и Γ_2. Для пар M_1'' справедлива

Т е о р е м а 4. I/Точки A_3 и A_4 суть фокусы луча A_3A_4 конгруэнции (A_3A_4), её торсы соответствуют линиям Γ_i. 2/Одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (A_2A_3) $((A_1A_4))$ соответствует линиям $\Gamma_1(\Gamma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокусы $F = \alpha A_3 + \beta A_4$ луча A_3A_4 конгруэнции (A_3A_4), её торсы, а также торсы конгруэнций (A_2A_3) и (A_1A_4) определяются соответственно из уравнений

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha\beta = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1)\omega^1\omega^2 = 0,$$

$$\omega^1(\lambda_3\omega_3^4 - \omega_2) = 0, \quad \omega^2(\lambda_4\omega_4^3 - \lambda_2\omega_1^3) = 0.$$

Следовательно, теорема доказана.

Аналогично, путем перехода к новому базису, доказано, что пары M_2, M_3, M_5, M_6 существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов, а пары M_4 -с произволом четырех функций двух аргументов.

Список литературы

I М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур."-Труды геом.семинара".М., ВИНИТИ, 3, 1971, с.193- 220.

2.Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций, 1956, М., ГИТТЛ.