нений

$$x^3(x^4)^5=0\,,\quad x^1-x^2=0\,,\; x^1x^2+x^3x^4=0\,,$$

определяющей фокальные точки коники C.

Т е о р е м а 4. Характеристическое многообразие [2] конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_3) состоит из четырех прямых линий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадрика Ли поверхности (A_3) задается уравнением

$$x^1x^2+x^3x^4-\lambda x^1x^4+\lambda x^2x^4-\frac{\Lambda+3\lambda^2+2\lambda}{2}(x^4)^2=0\,.$$

Характеристическое многообразие квадрики Ли определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}&\lambda(x^1)^2+\lambda(x^2)^2+(2\lambda q+9\lambda\Lambda+\Lambda_1+\Lambda+9\lambda^3+3\lambda^2)(x^4)^2=0,\\&(x^1+x^2)\left[\lambda x^1-\lambda x^2+(\Lambda+3\lambda^2+\lambda)x^4\right]=0\,.\end{aligned}\qquad(25)$$

Решая систему (25), убеждаемся в справедливости теоремы.

С л е д с т в и е. Так как характеристическое многообразие конгруэнции квадрик Ли поверхности (A_3) представляет собой четверку прямых, то все восемь фокальных [2] точек квадрики Ли могут быть найдены как точки пересечения этой квадрики с прямыми характеристического многообразия.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. – Тр. геом. семинара. Всес. ин-т научн. и технич. информации, 1974, 6, с.113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. IO 1979

УДК 513.73

М.Р. С о к у ш е в а

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. Рассмотрим поверхности $V_2\subset E_3$ и $\bar V_2\subset\bar E_3$, где E_3 и $\bar E_3$ – вполне ортогональные подпространства собственно евклидова пространства E_6, имеющие общую точку O. Диффеоморфизму T области $\Omega\subset V_2$ на область $\bar\Omega\subset\bar V_2$ соответствует поверхность

$$V_2^*=\{x\mid \vec{ox}=\vec{ox}_1+\vec{ox}_2\,,\ x_1\in\Omega\,,\ x_2=T(x_1)\in\bar\Omega\}\,,$$

называемая графиком отображения T. К поверхностям $V_2,\bar V_2,V_2^*$ присоединим соответственно реперы $R=\{x_1,\bar e_i\,\bar e_3\}$,

$$\bar R=\{x_2,\vec e_{i+3},\vec e_6\}\,,\quad R^*=\{x,\vec\varepsilon_i,\vec\varepsilon_3,\vec\varepsilon_{i+3},\varepsilon_6\}\,,\ (i,\gamma=1,2)\,,$$

причем

$$\bar e_i\in T_2(x_1),\ \vec e_{i+3}\in T_2(x_2)\,,\ \vec\varepsilon_i\in T_2(x)$$

$$\bar\varepsilon_i=\vec e_i+\vec e_{i+3}\,,\ \vec\varepsilon_{i+3}=\bar e_i-\gamma_{ik}\bar\gamma^{kt}\vec e_{t+3}\,,\ \vec\varepsilon_3=\bar e_3\,,\ \vec\varepsilon_6=\vec e_6\,,\qquad(1)$$

где $T_2(x_1),T_2(x_2),T_2(x)$ – касательные плоскости к поверхностям $V_2,\bar V_2,V_2^*$ в соответствующих точках x_1,x_2,x; $\bar e_3,\bar e_6$ – единичные векторы нормали к поверхностям V_2 и $\bar V_2$; $\vec\varepsilon_3,\vec\varepsilon_{i+3},\varepsilon_6$ лежат в плоскости $T_2^*(x)$ – ортогональном дополнении к касательной плоскости $T_2(x)$ в пространстве E_6.

$$\gamma_{ij}=\vec e_i\vec e_j\,,\quad \bar\gamma_{ij}=\vec e_{i+3}\vec e_{j+3}\,,\quad g_{ij}=\vec\varepsilon_i\cdot\vec\varepsilon_j=\gamma_{ij}+\bar\gamma_{ij}\qquad(2)$$

-метрические тензоры поверхностей $V_2, \bar{V}_2, V$ соответственно. Поверхности $V_2, \bar{V}_2, V_2^*$ в соответствующих реперах задаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\omega^3 = 0, \quad \bar{\omega}^3 = 0, \quad \theta^\alpha = 0, \quad \alpha = 3,4,5,6, \tag{3}$$

которые при продолжении приводят к уравнениям

$$\omega_i^3 = a_{ij}^3 \omega^j, \quad \bar{\omega}_i^3 = b_{ij}^3 \omega^j, \quad \theta_i^\alpha = t_{ij}^\alpha \theta^j.$$

Дифференцируя тождества (1), получим

$$\omega_i^k = \theta_i^k + \theta_i^{3+k}, \tag{4}$$

$$\bar{\omega}_i^k = \theta_i^k - \theta_i^{3+k} \gamma_{ls} \bar{\gamma}^{3k}. \tag{5}$$

$$\omega_i^3 = \theta_i^3, \tag{6}$$

$$\bar{\omega}_i^3 = \theta_i^6. \tag{7}$$

2. Пусть главная нормаль $N_q(x)$ к поверхности V_2^* в точке x [2] имеет размерность, равную двум. Тогда среди четырех асимптотических форм Φ^α поверхности V_2^* только две линейно независимы. Если это будут формы Φ^3 и Φ^6, то Φ^4 и Φ^5 можно записать в следующем виде:

$$\Phi^4 = \alpha_a \Phi^a, \quad \Phi^5 = \beta_a \Phi^a, \quad a = 3,6. \tag{8}$$

Следовательно,

$$t_{ij}^4 = \alpha_a t_{ij}^a, \qquad t_{ij}^5 = \beta_a t_{ij}^a. \tag{9}$$

Предполагаем, что каждая из систем (9) совместна, тогда

$$\operatorname{rang} \| t_{ij}^{\tilde{a}} \| = 2, \quad \operatorname{rang} \| t_{ij}^{\tilde{b}} \| = 2, \quad \tilde{a} = 3,4,6, \quad \tilde{b} = 3,5,6. \tag{10}$$

Положим для определенности

$$t_{11}^3 t_{22}^6 - t_{11}^6 t_{22}^3 \neq 0. \tag{11}$$

Из соотношений (10), учитывая (11), находим

$$t_{12}^\alpha = A t_{11}^\alpha + B t_{22}^\alpha. \tag{12}$$

Используя (9) и (12), векторы $\vec{b}_{ij} = t_{ij}^\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{ii} &= t_{ii}^a (\bar{\varepsilon}_a + \alpha_a \bar{\varepsilon}_{11} + \beta_a \bar{\varepsilon}_5), \\ b_{12} &= A \vec{b}_{11} + B \vec{b}_{22}. \end{aligned} \tag{13}$$

Линейно независимые векторы $\vec{b}_{11}$ и $\vec{b}_{22}$ вместе с точкой x определяют главную нормаль $N_2(x) \subset N_4(x)$.

Рассматривая вектор средней нормали $M^* = \frac{1}{2} g^{ij} \vec{b}_{ij}$ к поверхности V_2^* в точке x, получим следующее предложение: график отображения не может быть минимальной поверхностью при условии (11).

Пусть формы $\Phi^{i+3} = 0$, тогда из (4) и (5) имеем:

$$\bar{\omega}_i^j = \omega_i^j. \tag{14}$$

После внешнего дифференцирования (14) находим, что отображение T -конформно. Если орты $\vec{e}_i$ расположить на касательных в точке x_1 к линиям некоторой ортогональной сети, то

$$\gamma_{12} = \bar{\gamma}_{12} = g_{12} = 0, \quad \gamma_{ii} = 1, \quad \bar{\gamma}_{ii} = \alpha, \quad g_{ii} = 1 + \alpha. \tag{15}$$

Дифференцируя (15), получим:

$$\theta_i^i = 0 \Rightarrow \alpha = const.$$

Обратное выполняется. Итак, верна

Т е о р е м а I. Асимптотические формы Φ^4 и Φ^5 обращаются в нуль на поверхности V_2^* с двумерной главной нормалью тогда и только тогда, когда отображение T конформно с коэффициентом $\alpha = const$.

3. Рассмотрим случай, когда поверхность V_2^* с двумерной главной нормалью несет сопряженную сеть. Тогда $b_{12} = 0$, что приводит к равенству

$$t_{12}^\alpha = 0. \tag{16}$$

Известно [2], что точка

$$\vec{F}^{\ell}_{\kappa} = \vec{x}_1 - \frac{1}{a^{\ell}_{\kappa\ell}}\vec{e}_\kappa \left(\vec{F}^{1\ell}_{\kappa} = \vec{x}_\alpha - \frac{1}{b^{\ell}_{\kappa\ell}}\vec{e}_{\kappa+3}\right), \ \ell \neq \kappa$$

является псевдофокусом касательной $[x, \vec{e}_\kappa]$ $([x_2, \vec{e}_{\kappa+3}])$ к линии ω^κ $(\bar{\omega}^\kappa)$. Подставляя в (4) и (5) соотношения (16) при $\alpha = 4,5$, получим, что псевдофокусы линии L_i и $\bar{L}_i = T(L_i)$ соответствуют в индуцированном отображении. Через L_i обозначена линия на поверхности V_2, вдоль которой $\omega^i \neq 0$, $\omega^\kappa = 0$, $i \neq \kappa$. Обратно, если псевдофокусы линий L_i и $\bar{L}_i$ соответствуют, то имеет место следующая система:

$$\begin{cases} t^4_{12}\bar{\gamma}^{12} + t^5_{12}(\bar{\gamma}^{22}+1) = 0, \\ t^4_{12}(\bar{\gamma}^{11}+1) + t^5_{12}\bar{\gamma}^{12} = 0. \end{cases}$$

Решая ее относительно t^4_{12} и t^5_{12}, будем иметь

$$t^4_{12} = t^5_{12} = 0. \qquad (17)$$

Пользуясь равенствами (11), (12), (17), можно доказать, что в общем случае при $\Phi^4 \neq \kappa\Phi^5$ $t^\alpha_{ij} = 0$. Тогда $\bar{b}_{12} = 0$. Итак, верна

Т е о р е м а 2. Если $\Phi^4 \neq \kappa\Phi^5$, то соответствие псевдофокусов линий $L_i \subset V_2$ и $\bar{L}_i \subset \bar{V}_2$ в индуцированном отображении T_{*x} является необходимым и достаточным условием того, что на графике V^*_2 сеть линий θ^1, θ^2 сопряжена.

4. В плоскости главной нормали $N_2(x)$ существует присоединенная кривая порядка 2, не проходящая через точку x [2]. Для каждой точки y этой кривой найдется такое направление смещения точки x по поверхности V^*_2, для которого $\overline{dy} \in N_4(x)$. Из определения присоединенной кривой следует, что в репере она имеет следующее уравнение:

$$\det \| g^{i\alpha} t^\beta_{\kappa j}(g_{a\beta} + \alpha_a g_{4\beta} + \beta_a g_{5\beta}) y^a - \delta^i_j \| = 0, \quad (18)$$

где δ^i_j -символ Кронекера, $g_{\alpha\beta} = \vec{\varepsilon}_\alpha \vec{\varepsilon}$. Используя уравнение (18), можно доказать, что если график отображения V^*_2 несет одно семейство асимптотических линий, то присоединенная кривая- парабола. Если на поверхности V^*_2 нет асимптотических линий, то присоединенная кривая - гиперболического типа. Так/же справедлива

Т е о р е м а 3. Присоединенная кривая к графику распадается на пару прямых тогда и только тогда, когда коэффициенты в разложении вектора $\bar{b}_{12}$ по векторам $\bar{b}_{11}$ и $\bar{b}_{22}$ связаны условием $A+B=0$.

5. Пусть на поверхности V^*_2 существует одна линейно независимая квадратическая форма Φ^3. Тогда $\Phi^4 =$, $\Phi^5 = \gamma\Phi^3$, $\Phi^6 = \alpha\Phi^3$, $\alpha \neq 0$, так как противное приводит к тому, что V_2 -плоскость, а этот случай мы не рассматриваем. Верна следующая

Т е о р е м а 4. График V^*_2, главная нормаль которого I-мерна, является минимальной поверхностью тогда и только тогда, когда средние кривизны поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$ связаны условием

$$H = -\frac{1}{\alpha}\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\bar{H},$$

где γ, $\bar{\gamma}$ -дискриминанты метрических тензоров поверхностей V_2 и $\bar{V}_2$.

Пусть поверхность V^*_2 -поверхность класса I[3]. Тогда она лежит в своей соприкасающейся плоскости π_3, которую определяют точка x и векторы $\bar{\varepsilon}_i$, $\bar{b}_{11}$. Плоскость- π_3 - неподвижна. Пусть $M = \pi_3 \cap E_3$ $(\bar{M} = \pi_3 \cap \bar{E}_3)$. Справедлива

Т е о р е м а 5. Поверхность $V_2(\bar{V}_2)$ является конусом с вершиной в точке $M(\bar{M})$ тогда и только тогда, когда поверхность $\bar{V}_2(V_2)$ -конус с вершиной в точке O.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств. Уч. зап. МГПИ им. Ленина, 1970, № 374, т.I, 41-52.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовых пространствах.-Лит.матем.сб. 1966, VI, № 4, 475-492.

3. С х о у т е н И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии М., ГИИЛ, 1948, т.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Е.П.С о п и н а

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КВАДРИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе построен канонический репер конгруэнции $\mathcal{K}$ эллипсоидов и дана геометрическая характеристика его относительных инвариантов. Определены квадрики, ассоциированные с квадрикой конгруэнции $\mathcal{K}$ и исследован специальный класс конгруэнций $\mathcal{K}$ с распадающимися на плоскости ассоциированными квадриками.

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве A_3 конгруэнцию $\mathcal{K}$ эллипсоидов Q, центры которых описывают поверхность, не являющуюся торсом. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R=\{A, \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3\}$, где A -центр эллипсоида Q, векторы $\bar e_1, \bar e_2$ направлены по асимптотическим касательным к поверхности (A), а вектор $\bar e_3$ направлен по сопряженному направлению к касательной плоскости к поверхности (A). Концы векторов $\bar e_\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3)$ расположены на эллипсоиде Q. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar A = \omega^\alpha \bar e_\alpha \ , \quad d\bar e_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar e_\beta \ ,$$

причем формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathcal{D}\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha \ , \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta .$$

Уравнение эллипсоида Q и система дифференциальных уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ запишутся соответственно в виде:

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2\lambda x^1 x^2 - 1 = 0 \ , \qquad (1)$$