УДК 514.75

Ю. И. Попов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
yurij.popoff2015@yandex.ru

Нормализации Фосса и Грина $\mathcal{H}(L)$-распределения аффинного пространства

Для основных структурных подрасслоений гиперполосного $\mathcal{H}(L)$-распределения аффинного пространства A_n построены внутренним инвариантным образом нормализации Форса и Грина. По всей статье используются обозначения из работ [1; 2].

Ключевые слова: распределение, подрасслоение, нормализация, фокальное многообразие, фокальный конус.

1. Пусть задано поле нормалей первого рода $N_1 = [A, \vec{v}_n = v_n^i \vec{e}_i + \vec{e}_n]$ оснащенного H-подрасслоения

$$\nabla v_n^i + \omega_n^i = v_{nK}^i \omega^K \ \ (i,j,k = \overline{1, n-1}, K,L = \overline{1,n}). \qquad (1)$$

Найдем фокальное многообразие $F(N_{n-1}; L)$ нормали 1-го рода $N_{n-1}(A) = [A, \vec{v}_n, X]$ прямой $L(A)$ при смещении центра A распределения $\mathcal{H}(L)$ вдоль кривых (Z), принадлежащих L-подрасслоению:

$$(\mathcal{Z}): \begin{cases} \omega^1 = \mu^1\theta, \nabla\mu^1 - \mu^1\theta_1 = \mu_1^1\theta, \ D\theta = \theta\Lambda\theta_1, \\ \omega^\alpha = 0, \omega^n = 0 \ \ (\alpha, \beta, \gamma ... = \overline{2, n-1}, \ i = \{1; \alpha\}; \ \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} ... \overline{2, n}). \end{cases}$$

Пусть F — фокальная точка плоскости $N_{n-1}(A)$:

$$\vec{F} = \vec{A} + y^\alpha \vec{e}_\alpha + y^n \vec{v}_n, \quad \vec{v}_n = v_n^i \vec{e}_i + \vec{e}_n.$$

Из условия ее фокальности

$$d\vec{F} = \vartheta^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} + \vartheta^{n}(\nu_n^1\vec{e}_1 + \nu_n^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} + \vec{e}_n)$$

с учетом (1) находим

$$\begin{aligned} &\vartheta^{n} = dy^{n} + y^{n}\omega_n^n + y^{n}\nu_n^1\omega_1^n, \\ &\vartheta^{\alpha} = dy^{\alpha} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha} + y^{n}(\nu_{n1}^{\alpha} + \nu_{11}^{\alpha}\nu_n^1)\omega^1, \\ &[\delta_1^1 + y^{\alpha}\Lambda_{\alpha 1}^1 + y^{n}(\nu_{n1}^1 - \Lambda_{11}^n\nu_n^1\nu_n^1 + \nu_n^{\alpha}\Lambda_{\alpha 1}^1)]\omega^1 = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\nu_{11}^{\alpha} = \Lambda_{11}^{\alpha} - \Lambda_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}}\nu_{\mathrm{n}}^{\alpha}$, $\nabla\nu_{11}^{\alpha} \equiv 0$.

Так как уравнение (2) выполняется тождественно, то

$$\lambda_{\alpha}y^{\alpha} + \nu_n y^n - 1 = 0,$$

где

$$\lambda_{\alpha} = -\Lambda_{\alpha 1}^1, \quad \nabla\lambda_{\alpha} = \lambda_{\alpha K}\omega^K,$$

$$\nu_{\mathrm{n}} = -(\nu_{\mathrm{n}1}^1 - \Lambda_{11}^n\nu_n^1\nu_n^1 + \nu_{\mathrm{n}}^{\alpha}\Lambda_{\alpha 1}^1), \quad \nabla\nu_{\mathrm{n}} = \nu_{nK}\omega^K.$$

Итак, фокальное многообразие $F(N_{n-1}; L)$, которое в локальном репере R^1 задается уравнениями

$$\lambda_{\alpha}y^{\alpha} + \nu_n y^n - 1 = 0, \ y^1 = \nu_n^1 y^n, \qquad (3)$$

есть плоскость $\mathrm{K}_{n-2}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{N}_{n-1}(\mathrm{A})$. Плоскость $K_{n-2}(\mathrm{A})$ (3) является *аналогом плоскости Кенигса* [3; 4] нормали $N_{n-1}(\mathrm{A})$ базисного L-подрасслоения. Точку пересечения нормали $\vec{\nu}_n$ с плоскостью $\mathrm{K}_{n-2}(\mathrm{A})$, то есть точку

$$K_n(\nu): y^n = \frac{1}{\lambda_{\alpha}\nu_n^{\alpha} + \nu_n}, \quad y^i = \frac{1}{\lambda_{\alpha}\nu_n^{\alpha} + \nu_n}\nu_n^i$$

назовем *точкой Кенигса нормали* $\vec{\nu}_n$, ассоциированной с L-подрасслоением или кратко νL *-виртуальной точкой Кенигса.*

Определим в каждом центре А еще одну инвариантную плоскость $K_{n-3}(\mathrm{A}) = X(\mathrm{A}) \cap K_{n-2}(\mathrm{A})$:

$$y^1 = 0,\ y^n = 0,\ \lambda_\alpha y^\alpha - 1 = 0, \tag{4}$$

которая является нормалью 2-го рода плоскости $X(A)$. Итак, структура плоскости Кенигса $K_{n-2}(\nu)$ такова, что

$$K_{n-2}(\nu) = [K_{n-3}(A),\ K_n(\nu)].$$

Если задать другое поле инвариантных нормалей $\vec{\nu}_n^{\,*}$ H-подрасслоения, то в соответствующей точке A плоскость Кенигса имеет вид:

$$K_{n-2}(\nu^*) = [K_{n-3}(A),\ K_n(\nu^*)],$$

то есть плоскость $K_{n-3}(A)$ есть ось оснащающих плоскостей Кенигса в нормалях 1-го рода L-подрасслоения в данном центре A. Следовательно, имеет место

Теорема 1. *Для пучка нормалей 1-го рода $N_{n-1}(A)$ прямой L(A) в данном центре A все плоскости Кенигса этих нормалей проходят через неподвижную (инвариантную) плоскость $K_{n-3}(A)$ (4) — ось пучка плоскостей Кенигса.*

2. Аналогично находим фокальное многообразие $F(N_2; X)$ нормали 1-го рода $N_2(A)$ плоскости $X(A)$ при смещениях центра A вдоль кривых

$$(\mathrm{X}): \begin{cases} \omega^\alpha = \mu^\alpha \theta,\ \nabla\mu^\alpha - \mu^\alpha\theta_1 = \mu_1^\alpha\theta_1,\ \ D\theta = \theta\Lambda\theta_1, \\ \omega^1 = 0,\ \ \omega^n = 0, \end{cases}$$

принадлежащих X-подрасслоению данного $\mathcal{H}(L)$-распределения.

$$y^\alpha = \nu_n^\alpha y^n,\ \det\left\| \delta_\beta^\alpha + y^1\nu_{1\beta}^\alpha + y^n(\nu_{n\beta}^\alpha + \nu_{1\beta}^\alpha\nu_n^1 - \lambda_{\gamma\beta}^n\nu_n^\alpha\nu_n^\gamma) \right\| = 0, \tag{5}$$

где $\nu_{1\beta}^\alpha = \Lambda_{1\beta}^\alpha - \Lambda_{1\beta}^n\nu_n^\alpha$, $\nabla\nu_{1\beta}^\alpha \equiv 0$.

Линейная поляра центра A относительно фокального многообразия $F(N_2;X)$ (5):

$$\left\{ y^\alpha = \nu_n^\alpha y^n,\ \tilde{\nu}_1 y^1 + \tilde{\nu}_n y^n - 1 = 0, \right. \qquad (6)$$

где

$$\tilde{\nu}_1 = -\frac{1}{n-2}\nu_{1\alpha}^\alpha,\ \ \nabla\tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_{1K}\omega^K, \qquad (7)$$

$$\tilde{\nu}_n = -\frac{1}{n-2}(\nu_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\alpha}^n \nu_n^\gamma \nu_n^\alpha + \nu_{1\alpha}^\alpha \nu_n^1),\ \ \nabla\tilde{\nu}_n = \tilde{\nu}_{nK}\omega^K, \qquad (8)$$

представляет собой прямую K_1, которую назовем νX*-виртуальной прямой Кенигса* [1] плоскости $N_2(A) = [A, L, \vec{\nu}_n]$ в центре A. Поле прямых (6) задается полем квазитензора $\{\nu_n^\alpha\}$:

$$\nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha \omega^K$$

и полями (7, 8) тензоров $\{\tilde{\nu}_1\}$, $\{\tilde{\nu}_n\}$.

Точку $\tilde{C}_n$ пересечения нормали $N_1\{\nu_n^i\}$ с прямой K_1(A) (6)

$$\tilde{C}_n(\nu):\ \ y^n = \frac{1}{\tilde{\nu}_1\nu_n^1 + \tilde{\nu}_n},\ \ y^i = \frac{1}{\tilde{\nu}_1\nu_n^1 + \tilde{\nu}_n}\nu_n^i,$$

назовем νX *-виртуальной точкой Кенигса* [1].

Точку пересечения прямой $K_1(A)$ с прямой $L(A)$, то есть точку

$$G_1 : y^\alpha = 0,\ \ y^n = 0,\ \ \tilde{\nu}_1 y^1 = 0, \qquad (9)$$

назовем ν *-виртуальной точкой Грина* [2] прямой $L(A)$, так как она зависит от выбора нормали $\vec{\nu}_n$ плоскости $H(A)$.

Рассмотрим (n-2)-плоскость $q_{n-2}(A) = [K_{n-3}(A); G_1]$, которая определяется системой уравнений

$$y^n = 0,\ \ q_i y^i - 1 = 0, \qquad (10)$$

где $q_1 = \tilde{\nu}_1$, $q_\alpha = \lambda_\alpha$.

Следуя работам [2; 5; 6], плоскость $q_{n-2}(A)$ назовем νH *-виртуальной плоскостью Грина* H-подрасслоения данного $\mathcal{H}(L)$-распределения.

В биекции Бомпьяни — Пантази [7] νH-виртуальной нормали 2-го рода Грина (10) соответствует νH-виртуальная нормаль 1-го рода q_n^i, где $q_n^i = -\Lambda_n^{ij} q_j + \mathcal{A}_n^i$.

В результате справедлива

Теорема 2. *$\mathcal{H}(L)$-распределение внутренним инвариантным образом порождает νH-виртуальную нормализацию Грина (q_n^i, q_i) в дифференциальной окрестности порядка t, где t — порядок квазинормали $\{\nu_n^\alpha\}$ (или нормали $\vec{\nu}_n$ H-подрасслоения).*

3. Следуя работе [8], назовем *фокальной гиперплоскостью базисного L-подрасслоения* в центре A данного $\mathcal{H}(L)$-распределение всякую гиперплоскость $\xi(A)$, которая содержит две бесконечно близкие прямые L-подрасслоения при смещении центра A вдоль некоторой интегральной кривой L-подрасслоения.

Так как $L(A) \subset \xi(A)$, то уравнение гиперплоскости $\xi(A)$ в локальном репере R^1 зададим в виде

$$\xi_\alpha x^\alpha + \xi_n x^n = 0. \tag{11}$$

Имеем

$$d\vec{\mathcal{A}}\,|_{\omega^{\tilde{\alpha}}=0} = \omega^1 \vec{e}_1, \;\; d\vec{e}_1\,|_{\omega^{\tilde{\alpha}}=0} = \omega_1^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{11}^\alpha \omega^1 \vec{e}_\alpha + \Lambda_{11}^n \omega^1 \vec{e}_n. \tag{12}$$

Учитывая (11, 12), для искомых интегральных кривых L-подрасслоения получим соотношения

$$\omega^\alpha = \omega^n = 0, \; (\xi_\alpha \Lambda_{11}^\alpha + \xi_n \Lambda_{11}^n)\omega^1 = 0. \tag{13}$$

Система (13) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\xi_\alpha \lambda_{11}^\alpha + \xi_n \lambda_{11}^n = 0. \tag{14}$$

Таким образом, уравнения (13) определяют геометрическое место фокальных гиперплоскостей — фокальный гиперконус класса 1 [8], вершина которого есть прямая $L(A)$.

Линейной полярой гиперплоскости H(A) [9] относительно фокального гиперконуса (14) является связка гиперплоскостей, которую с учетом (11) представим в виде

$$(x^\alpha - \Lambda^\alpha_{11}\Lambda^{11}_n x^n)\xi_\alpha = 0. \tag{15}$$

Все гиперплоскости связки (15) пересекаются по двумерной плоскости

$$\Phi_2(A) = [A, \vec{e}_1, \vec{e}_n + \Phi^\alpha_n \vec{e}_\alpha], \tag{16}$$

которая и является *линейной полярой* гиперплоскости $H(A)$ [9] относительно фокального гиперконуса (14).

В локальном репере $R^1(A)$ плоскость Φ_2 (16) задается уравнениями

$$x^\alpha - \Phi^\alpha_n x^n = 0,$$

где

$$\Phi^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{11}\Lambda^{11}_n, \;\; \nabla\Phi^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \Phi^\alpha_{nK}\omega^K . \tag{17}$$

Поле квазитензора $\{\Phi^\alpha_n\}$ (17) 1-го порядка задает поле нормалей Φ_2 1-го рода X-подрасслоения,

4. Аналогичные построения (см. п. 3) проведем для X-подрасслоения данного $\mathcal{H}(L)$-распределения. Уравнение искомой фокальной гиперплоскости $\eta(A)$ X-подрасслоения зададим следующим образом (в репере R^1):

$$\eta_1 x^1 + \eta_n x^n = 0. \tag{18}$$

Геометрическое место фокальных гиперплоскостей $\eta(A)$ (18) X-подрасслоения — фокальный гиперконус класса (n-2), вершиной которого служит плоскость $X(A)$, представим в виде

$$\det\left\|\eta_n\Lambda^n_{\alpha\beta} + \eta_1\Lambda^1_{\alpha\beta}\right\| = 0. \tag{19}$$

Линейной полярой гиперплоскости $H(A)$ относительного гиперконуса (19) является связка гиперплоскостей

$$x^1 - \frac{1}{n-2}\Lambda^1_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\alpha}_n x^n = 0,$$

которая определяет (n - 1)-плоскость

$$\Phi_{n-1}(A) = [A, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_n + \Phi^1_n \vec{e}_1], \tag{20}$$

где

$$\Phi^1_n = \frac{1}{n-2}\Lambda^1_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\alpha}_n, \quad \nabla\Phi^1_n + \omega^1_n = \Phi^1_{nK}\omega^K. \tag{21}$$

Таким образом, поле квазитензора $\{\Phi^\alpha_n\}$ (21) 2-го порядка задает поле плоскостей Φ_{n-1} (20) — поле нормалей 1-го рода L-подрасслоения.

Плоскости Φ_2 (16) и Φ_{n-1} (20) пересекаются в каждом центре A по прямой $\Phi_1 = [A, \vec{\Phi}_1(A)]$:

$$\Phi_1(A) = \Phi_2(A) \cap \Phi_{n-1}(A), \quad \vec{\Phi}_1 = \vec{e}_n + \Phi^i_n \vec{e}_i, \tag{22}$$

где $\{\Phi^i_n\} = \{\Phi^\alpha_n; \Phi^1_n\}$, $\nabla\Phi^i_n + \omega^i_n = \Phi^i_{nK}\omega^K$.

Следуя работам [6; 8], прямую $\Phi_1(A)$ (22) назовем нормалью Фосса $\mathcal{H}(L)$-распределения в центре A. Соответственно плоскости $\Phi_2(A)$ (16) и $\Phi_{n-1}(A)$ (20) назовем нормалями Фосса 1-го рода в смысле Нордена [5] X-, L-подрасслоений данного $\mathcal{H}(L)$-распределения.

В силу биекции Бомпьяни — Пантази [10] полям нормалей Фосса $\{\Phi^\alpha_n\}$, $\{\Phi^1_n\}$, $\{\Phi^i_n\}$ 1-го рода поставим в соответствие поля нормалей 2-го рода X-, L-, H-подрасслоений:

$$\Phi_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\beta}\Phi^\beta_n - \mathcal{A}_\alpha, \; \nabla\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha K}\omega^K,$$

$$\Phi_1 = -\Lambda^n_{11}\Phi^1_n - \widetilde{\mathcal{A}}_1, \; \nabla\Phi_1 = \Phi_{1K}\omega^K,$$

$$\Phi_i = -\Lambda^n_{ij}\Phi^j_n - \mathcal{A}_i,\ \nabla\Phi_i = \Phi_{iK}\omega^K,$$

где $\mathcal{A}_\alpha = \Lambda^n_{\alpha n}, \nabla\mathcal{A}_\alpha \equiv \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n$; $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = -\Lambda^n_{11}\mathcal{A}^1_n, \nabla\widetilde{\mathcal{A}}_1 \equiv \Lambda^n_{11}\omega^1_n$; $\mathcal{A}_i = \Lambda^n_{in}$, $\nabla\mathcal{A}_i \equiv \Lambda^n_{ij}\omega^j_n$;

Заметим, что если задано поле нормалей Фосса $\{\Phi^i_n\}$ H-подрасслоения, то охват тензора $\widetilde{\nu}_1$ (7) имеет вид

$$\tilde{\nu}_1 = -\frac{1}{n-2}(\Lambda^\alpha_{1\alpha} - \Lambda^n_{1\alpha}\Phi^\alpha_n) \overset{def}{=} G_1 \tag{23}$$

в дифференциальной окрестности 1-го порядка. В этом случае, согласно работам [2; 5; 6], плоскость

$$y^n = 0,\ G_i y^i - 1 = 0, \tag{24}$$

где $\widetilde{\nu}_1 = G_1$, $G_\alpha = \lambda_\alpha$, назовем *ребром Грина* $G_{n-2}(A)$ H-подрасслоения.

В биекции Бомпьяни — Пантази нормали 2-го рода Грина $\{G_i\}$ соответствует нормаль 1-го рода $\{G^i_n\}$, где

$$G^i_n = -\Lambda^{ij}_n G_j + \mathcal{A}^i_n, \tag{25}$$

которую назовем *нормалью 1-го рода Грина* $\{G^i_n\}$ H-подрасслоения.

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Нормаль Фосса $\Phi_1(A)$ $\mathcal{H}(L)$-распределения в каждом центре A есть пересечение линейных поляр гиперплоскости H(A) относительно фокальных гиперконусов (14) и (19) соответственно L-, X-подрасслоений.*

$\mathcal{H}(L)$-распределение внутренним инвариантным образом порождает нормализацию Фосса — Грина $(\Phi^i_n; G_i)$ и нормализацию Фосса $(\Phi^\alpha_n, \Phi_\alpha)$ X-подрасслоения в дифференциальной

окрестности 1-го порядка и нормализации Фосса $(\varPhi_n^1, \varPhi_1)$, $(\varPhi_n^i, \varPhi_i)$ *соответственно L-, H-подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка.*

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение $\mathcal{H}(L)$ аффинного пространства // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XXIV междунар. науч.-практ. конф. Новосибирск, 2015. Вып. 9(33). С. 17—30.

2. *Попов Ю.И.* Нормализации Фосса и Грина гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2016. №4. С. 5—17.

3. *Остиану Н.М.* Распределение гиперполосных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71—120.

4. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного распределения *m*-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

6. *Благонравов В.В.* Распределения на гиперповерхности аффинного пространства / ВИНИТИ. М., 1982.

7. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 49—56.

8. *Акивис М.А.* Фокальные образы поверхности ранга *r* // Изв. вузов. Математика. 1957. №1. С. 9—19.

9. *Ивлев Е.Т., Лучинин А.А.* О полярном соответствии относительно алгебраической поверхности и его приложениях // Геом. сб. Томск, 1968. Т. 7. С. 23—24.

10. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов $\mathcal{H}$ -распределения аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 113—125.

Yu. Popov

Foss and Green normalization
for $\mathcal{H}(L)$-distribution of affine space

For the basic structure subbundles of the hyperstrip $\mathcal{H}(L)$-distribution of affine space A_n we construct Foss and Green normalization in the inner invariant manner. Throughout the article we use designations of [1; 2].

Key words: distribution, subbundle, normalization, focal variety, focal cone.

УДК 514.76

Н. А. Рязанов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
ryazanov-92@mail.ru

Дифференциальные сравнения компонент объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка в несимметричном случае

Выведены дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка в случае несимметричного объекта связности. Эти сравнения показывают, что в общем случае объект кривизны 2-го порядка образует геометрический объект лишь в совокупности с объектом кривизны 1-го порядка и объектом связности 2-го порядка.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, аффинная связность, объект кривизны 2-го порядка, голономное, полуголономное и неголономное гладкие многообразия.