Yu. Shevchenko

THREE BUNDLES OF A PROJECTIVE GROUP

The transformation group GP(n) of n-measurement projective space P_n, allocated by a factorization from a linear group GL(n+1) is considered. A projective group GP(n) is contain affine group GA(n), coaffine group $GA^*(n)$ and linear group GL(n) being subgroups of stationarities of a hyperplane P_{n-1}, point A and 0-pair (A,P_{n-1}), $A\notin P_{n-1}$. It is shown, that the projective group GP(n) is represented by the way of three main bundles, standard layers which one the subgroups GA(n), $GA^*(n)$ and GL(n) are: 1) affine frames over dual projective space of hyperplanes $P_n^* = Gr(n-1,n)$ – manifold of Grassmann of hyperplanes; 2) coaffine frames over initial projective space $P_n = Gr(0, n)$ – manifold of Grassmann of points; 3) linear frames with connection over 2n-measurement space of 0-pairs Π_{2n} – subset not incident pairs (A,P_{n-1}) of direct product $P_n \times P_n^* = Gr(0,n)\times Gr(n-1,n)$.

УДК 514.75

С.Н. Юрьева
(Калининградский государственный университет)

ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A_n

Изучается дифференциальная геометрия гиперполосных распределений (n-2)-мерных линейных элементов аффинного пространства A_n.

Схема использования индексов такова:

$$i, j, k, l, s, t = \overline{1, n-2}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = n-1, n;$$
$$a, b, c = \overline{1, n-1}, \quad I, J, K, L = \overline{1, n}.$$

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n со структурными уравнениями

$$D\omega^I = \varpi^L \wedge \omega_L^I, \; D\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K, \tag{1}$$

отнесенное к подвижному реперу $\left(A, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\vec{A} = \omega^K \vec{e}_K \text{ , } d\vec{e}_J = \omega_J^K \vec{e}_K .$$

Пусть (n-2)-мерная плоскость M(A) задана линейно независимыми векторами $\vec{m}_i = \vec{e}_i + M_i^\alpha \vec{e}_\alpha$. Тогда известно [1; 2], что структурные формы многообразия m-мерных плоскостей n-мерного аффинного пространства имеют вид

$$\Delta M_i^\alpha = \nabla M_i^\alpha - M_i^\beta M_j^\alpha \omega_b^j + \omega_i^\alpha .$$

Равенство $\Delta M_i^\alpha = 0$ представляет собой условие стационарности плоскости M(A) при допустимых преобразованиях репера. Аналогично структурные формы многообразия гиперплоскостей, заданных (n–1) линейно независимыми векторами $\overrightarrow{l_a} = \overrightarrow{e_a} + H_a^n \overrightarrow{e_n}$, запишутся в виде

$$\Delta H_a^n = \nabla H_a^n - H_a^n H_c^n \omega_n^c + \omega_a^n .$$

Согласно [1; 2] n-мерные погруженные многообразия в пространствах представления $\{\Delta M_i^\alpha, \omega^J\}$, $\{\Delta H_a^n, \omega^J\}$, задаваемые дифференциальными уравнениями

$$\Delta M_i^\alpha = M_{iK}^\alpha \omega^K , \quad \Delta H_a^n = H_{aK}^n \omega^K , \tag{2}$$

называются распределениями соответственно (n-2)-мерных плоскостей и гиперплоскостей.

Потребуем, чтобы в некоторой области пространства A_n для любого центра A имело место соотношение $A \in M(A) \subset H(A)$. Распределение (2) с таким отношением инцидентности их соответствующих элементов называется *гиперполосным распределением* H*(M)* или H-распределением. При этом распределение плоскостей M_{n-2} называется *базисным распределением* (или M-распределением), а распределение гиперплоскостей H_{n-1} – *оснащающим распределением* (или H-распределением).

Произведем следующую канонизацию репера $\left\{A, \overrightarrow{e_I}\right\}$: поместим векторы $\{ \vec{e}_\alpha \}$ в гиперплоскость H(A), а векторы $\{ \vec{e}_i \}$ – в плоскость

M(A). Выбранный таким образом репер назовем репером 0-го порядка R^0. Дифференциальные уравнения H-распределения относительно репера R^0 принимают следующий вид:

$$\omega_i^n = M_{iK}^n \omega^K = H_{iK}^n \omega^K, \ \omega_i^{n-1} = M_{iK}^{n-1} \omega^K, \ \omega_{n-1}^n = H_{n-1,K}^n \omega^K, \qquad (3)$$

где функции $\{M_{iK}^n\}$, $\{M_{iK}^{n-1}\}$, $\{H_{n-1,K}^n\}$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{gathered} \nabla M_{iL}^n = M_{iLK}^n \omega^K, \ \nabla M_{iL}^{n-1} + M_{iL}^n \omega_n^{n-1} = M_{iLK}^{n-1} \omega^K, \\ \nabla H_{n-1,L}^n + M_{iL}^n \omega_{n-1}^i = H_{n-1,LK}^n \omega^K. \end{gathered} \qquad (4)$$

Итак, относительно репера R^0 H(M)–распределение задается уравнениями (3; 4), а геометрический объект $\Gamma_1 = \{M_{iK}^n, M_{iK}^{n-1}, H_{n-1,K}^n\}$ является его фундаментальным объектом 1-го порядка. Справедлива

Теорема 1. *Гиперполосное распределение* H*(M) относительно репера нулевого порядка аффинного пространства A_n существует с произволом 2n-3 функций n аргументов.*

Для регулярного H-распределения согласно лемме Н.М. Остиану возможна частичная канонизация репера R^0, как это следует из дифференциальных уравнений

$$\nabla H_{n-1,j}^n + M_{ij}^n \omega_{n-1}^i = H_{n-1,jL}^n \omega^L \qquad (5)$$

Действительно, полагая $H_{n-1,j}^n = 0$, мы разрешим уравнения (5) относительно форм ω_{n-1}^i:

$$\omega_{n-1}^i = -M_n^{ij} H_{n-1,jK}^n \omega^K \overset{def}{=} H_{n-1,K}^i \omega^K$$

Геометрический смысл такой канонизации заключается в том, что вектор $\{\vec{e}_{n-1}\}$ помещается в характеристику $E_1(A)$ гиперплоскости H(A). Выбранный таким образом репер назовем репером 1-го порядка R^1. Дифференциальные уравнения H-распределения относительно репера R^1 принимают следующий вид:

$$\omega_i^n = M_{iK}^n \omega^K, \ \omega_i^{n-1} = M_{iK}^{n-1}\omega^K, \ \omega_{n-1}^n = H_{n-1,\beta}^n \omega^\beta, \ \omega_{n-1}^i = H_{n-1K}^i \omega^K, \quad (6)$$

где функции $M_{iK}^n, M_{iK}^{n-1}, H_{n-1,\beta}^n, H_{n-1,K}^i$ удовлетворяют соответственно уравнениям (4) и уравнениям

$$\nabla H_{n-1,j}^i = H_{n-1,jK}^i \omega^K, \ \nabla H_{n-1,n-1}^i + H_{n-1,n-1}^n \omega_n^i = H_{n-1,n-1K}^i \omega^K,$$
$$\nabla H_{n-1,n}^i - H_{n-1,j}^i \omega_n^j - H_{n-1,n-1}^i \omega_n^{n-1} + H_{n-1,n}^n \omega_n^i = H_{n-1,nK}^i \omega^K.$$

Геометрические объекты $\Gamma_1 = \{M_{iK}^n, \ M_{iK}^{n-1}, \ H_{n-1,\beta}^n\}$, $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \ H_{n-1,K}^i\}$ являются фундаментальными объектами соответственно 1-го и 2-го порядка регулярного Н-распределения относительно репера R^1. Имеет место

Теорема 2. *Гиперполосное распределение* $\mathcal{H}$ *(М) относительно репера первого порядка аффинного пространства* A_n *существует с произволом 3(n-2) функций n аргументов.*

2. Для тензора $H_{n-1,n-1}^n$ введем обратный тензор: $\nabla H_n^{n-1,n-1} = H_{nK}^{n-1,n-1}\omega^K$.

Введем в рассмотрение функции

$$H_n^{n-1} = -H_n^{n-1,n-1} H_{n-1,n}^n, \ H_n^i = -H_{n-1,n-1}^i H_n^{n-1,n-1}, \ \{H_n^a\} \overset{def}{=} \{H_n^i, \ H_n^{n-1}\}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции H_n^{n-1}, H_n^i, H_n^a образуют квазитензоры 1-го порядка:

$$\nabla H_n^{n-1} + \omega_n^{n-1} = H_{nK}^{n-1}\omega^K, \ \nabla H_n^i + \omega_n^i = H_{nK}^i \omega^K, \ \nabla H_n^a + \omega_n^a = H_{nK}^a \omega^K.$$

Поле квазитензора $\{H_n^a\}$ задает инвариантное поле аффинной нормали $H_1 = [A, \vec{h}_n]$, где поле векторов $\vec{h}_n = H_n^a \vec{e}_a + \vec{e}_n = H_n^i \vec{e}_i + H_n^{n-1}\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n$ внутренним образом определено Н(*М*)-распределением. Справедлива

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка внутренним образом присоединяется к Н(М)-распределению поле его нормалей 1-го рода* H_1 *такое, что при смещении центра А Н (М)-распределения вдоль кривых* $\omega^a = H_n^a \omega^n$, *принадлежащих* *этому полю нормалей H_1, гиперплоскость H(A) переносится параллельно самой себе.*

Поля квазитензоров 1-го порядка $\{H_n^i\}$, $\{H_n^{n-1}\}$ задают поля нормалей 1-го рода $N_2 = [E_1,\ H_1]$; $N_{n-1} = [M_{n-2},\ H_1]$ соответственно М-распределения и Е-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна.

Заметим, что в каждом центре А выполняется соотношение $H_1(A) = N_2(A) \cap N_{n-1}(A)$. В соответствии Бомпьяни-Пантази

$$\nu_a = -H_{ab}^n \nu_n^b - H_{an}^n \Leftrightarrow \nu_n^b = -H_n^{ba} H_{an}^n - \nu_a H_n^{ba},$$
$$\nu_i = -M_{ij}^n \nu_n^j - M_{i\beta}^\beta \Leftrightarrow \nu_n^j = -M_n^{jk} M_{kn}^n - \nu_i M_n^{ij},$$
$$\nu_{n-1} = -H_{n-1,n-1}^n \nu_n^{n-1} - H_{n-1,n}^n \Leftrightarrow \nu_n^{n-1} = -H_n^{n-1,n-1} H_{n-1,n}^n - \nu_{n-1} H_n^{n-1,n-1}$$

нормалям $\{H_n^a\}$, $\{H_n^i\}$, $\{H_n^{n-1}\}$ 1-го рода соответственно Н-распределения, М-распределения и Е-распределения в каждом центре А ставятся в соответствие нормали 2-го рода Н-распределения, М-распределения и Е-распределения.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка внутренним образом присоединяются соответственно нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна (H_n^i, h_i), (H_n^{n-1}, h_{n-1}) основных структурных М-, Е-подрасслоений данного $H(M)$-распределения и нормализации в смысле (H_n^a, h_a) для Н-распределения.*

Список литературы

1. *Алшибая Э.Д.* Дифференциальная геометрия гиперповерхности в многомерном аффинном пространстве // Тр. Тбилисского ун-та. Тбилиси, 1968. Т. 129. С. 319 – 341.

2. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Московского матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275 – 382.

S. Jureva

HYPERSTRIP DISTRIBUTION CODIMENSION
TWO OF AFFINE SPACE A_n

It is studied differential geometry of hyperstrip distributions of (n-2)-measured lenear elements of affine space A_n.

СЕМИНАР
по дифференциальной геометрии многообразий фигур
при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 25 декабря 2001 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 2002 году.

11.02.02. *В.С. Малаховский*. О некоторых свойствах базовых последовательностей пифагоровых треугольников.

18.02.02. *М.Л. Винокур*. Пространство окружностей на плоскости как объединение пучка окружностей и ортогональных ему конгруэнций.

25.02.02. *Н.В. Малаховский*. Окружности пропорциональных сечений треугольника.

04.03.02. *А.В. Скрягина*. Основы проективно-дифференциальной геометрии.

11.03.02. *Б.А. Андреев*. Гиперквадрика Чеха точечного соответствия.

18.03.02. *К.В. Полякова*. Групповая связность в пространстве элементов Лаптева.

25.03.02. *И.Е. Волкова*. Цилиндрические распределения на гиперполосе SH_m.

01.04.02. *А.В. Скрягина*. Геометрические образы, двойственные плоскостной поверхности.

08.04.02. *С.Ю. Волкова*. Двойственный образ гиперполосы $SH_r(L)$.

15.04.02. *Н.А. Елисеева*. Двойственный образ Н (П)-распределения.

22.04.02. *Н.Н. Иванищева*. Дифференцируемое отображение проективного пространства в многообразие гиперквадрик центропроективного пространства.

29.04.02. *К.В. Полякова*. Некоторые понятия теории индуцированных связностей на поверхности.

06.05.02. *Т.Ю. Максакова*. Двойственные аффинные связности гиперполосы CH_m^r.