$$2\omega_3^1\wedge\omega_3^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^1-2\omega_2^3\wedge\omega_3^2+\omega_1^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^1+2\omega_1\wedge\omega_{n+1}^1-$$
$$-\omega_2^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^2-\omega_2\wedge\omega_{n+1}^2=0,$$
$$\omega_3^1\wedge\omega_1^2+(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3)\wedge\omega_3^2-\omega_3^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^2-\omega_3\wedge\omega_{n+1}^2=0,$$
$$\omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1^{\hat a}\wedge\omega_{\hat a}^2+\omega_1\wedge\omega_{n+1}^2=0,$$

определяющие совместно с (10) расслояемую пару (C, S_{n-2}). Из анализа соотношений (11) следует утверждение, аналогичное предложению п 1.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве: Тр. Геометр .семинара | ВИНИТИ АН СССР. М.,1969.Т.2.С.179-206.

2. Х у д е н к о В.Н. Многообразия коник в P_4 с неопределенными фокальными поверхностями // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб.науч .тр. | Калинингр. ун-т.Калининград,1981.Вып.12. С.118-120.

3. Х у д е н к о В.Н. О связности в расслоении, ассоциированном с многообразием многомерных квадрик || Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб.науч .тр. | Калинингр.ун-т.Калининград. 1984.Вып.15.С.96-99.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.17 1986

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ,ОБРАЗОВАННЫЕ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

В.П. Ц а п е н к о

В работе исследуются в трехмерном проективном пространстве конгруэнции K_2 пар фигур (P,Q), порожденных квадрикой Q и неинцидентной ей точкой P. Для одного частного класса таких конгруэнций получено безынтегральное представление.

§1. Конгруэнции K_2^{11}

Поставим в соответствие каждой паре фигур (P,Q) репер $\tau=\{\bar A_0,\bar A_1,\bar A_2,\bar A_3\}$ следующим образом: вершину A_0 совместим с точкой P, вершины A_1 и A_2 поместим в касательную плоскость к поверхности (A_0) в точке A_0 так, чтобы они были инцидентны конике C и поляре точки A_0 относительно этой коники. Коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q. В качестве вершины A_3 выбран полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q. Уравнение квадрики в репере τ может быть приведено к виду: $\mathcal{F}\equiv(x^0)^2+(x^3)^2-2x^1x^2=0$. Рассмотрим конгруэнции K_2^{11}, для которых ассоциированная квадрика Q_i $(i=1,2)$ [1] распадается в пару плоскостей $A_0A_iA_3$ и $A_0A_1A_2$, причем поверхность (A_0) не является развертывающейся. Такие конгруэнции являются подклассом конгруэнций $(P,Q)^*_{2,2}$ [1]. Конгруэнции K_2^{11} определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^j=0,\quad \omega_i^0=\omega_0^j,$$
$$\omega_i^3=a\omega_0^j,\quad \omega_3^i=g\omega_j^3,\quad da=0,\quad dg=0, \tag{1}$$
$$\omega_0^0=0,\quad \omega_3^3=0,\quad \omega_1^1+\omega_2^2=0\quad (i,j=1,2;\ i\neq j)$$

с произволом 14 постоянных.

Анализируя систему (1), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции K_2^{11} обладают следующими свойствами: 1)фокусы луча прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют точки A_1 и A_2; 2)линии, высекаемые торсами прямолинейных конгруэнций (A_0A_3) и (A_1A_2) на поверхностях $(A_0),(A_3)$ и $(A_1),(A_2)$ соответственно, гармонически разделяют координатные линии $\omega^i=0$; 3)прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2); 4)фокальное многообразие конгруэнции квадрик (Q) содержит конику C; 5) поверхности (A_i) вырождаются в плоские линии, касательные к которым пересекаются в точке $B=A_0+aA_3$;6)прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) вырождается в связку прямых с центром $F=agA_0-A_3$, а прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) – в двупараметрическое семейство прямых на плоскости A_1A_2B; 7) поверхности (A_0) и (A_3) являются невырожденными квадриками;8)все коники C принадлежат инвариантной квадрике Q_c; 9)квадрики (A_0), (A_3) и Q_c касаются вдоль их общей коники $\mathcal{L}$.

Т е о р е м а 2.Квадрика $(A_0)((A_3))$ имеет прямолинейные образующие A_0A_i и A_iN (A_3A_i и A_iM), причем выполняются соотношения $(A_0A_3;BN)=(A_0A_3;MF)$, $(A_0A_3;BF)=(BF;NM)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Непосредственной проверкой убеждаемся, что любая точка прямой A_0A_i и прямой A_iN, где $N=(1-a^2g)A_0+2aA_3$ (прямой A_3A_i и прямой A_iM, где $M=2agA_0+(a^2g-1)A_3$), инцидентна квадрике $(A_0)((A_3))$. Для указанных точек находим $(A_0A_3;BN)=(A_0A_3;MF)=\frac{1}{2}(1-a^2g)$; $(A_0A_3;BF)=(BF;NM)=-a^2g$. Отметим также, что полюс K плоскости A_1A_2B относительно квадрики Q и точка B разделяют вершины A_0 и A_3 в постоянном отношении $(A_0A_3;BK)=-a^2$.

§2.Безынтегральное представление конгруэнций K_2^{11}

Конгруэнции K_2^{11} можно получить с помощью следующих геометрических построений.

Задаем произвольные квадрику Q_1 и плоскость π, используя соответственно девять и три постоянных.Касательная плоскость α к квадрике Q_1 в произвольной точке P пересекает плоскость π по прямой ℓ. Используя еще одну постоянную, строим квадрику Q_2, касающуюся квадрики Q_1 вдоль их общей коники $\mathcal{L}$, лежащей в плоскости π (свойство 9, теор.1).Обозначим через F полюс плоскости π относительно квадрики Q_1. С помощью оставшейся постоянной задаем точку K на прямой PF. Пусть T обозначает точку пересечения прямой PF с квадрикой Q_2.

Построим квадрику Q_3, исходя из условий: 1)коника $\mathcal{L}$ ей принадлежит; 2)точка F является полюсом плоскости π относительно Q_3; 3) точка T является полюсом плоскости α относительно Q_3. В сечении найденной квадрики Q_3 с плоскостью α получаем конику C (свойство 8, теор.1).

Квадрику Q получим, учитывая, что коника C принадлежит ей, а точки K и T являются полюсами соответственно плоскостей π и α относительно этой квадрики.

Вершину A_0 совместим с точкой P, вершину A_3 – с точкой T, а вершины A_i ($i=1,2$) поместим в точки пересечения прямой ℓ с коникой $\mathcal{L}$. Получаем описанный выше репер τ. При движении точки P по квадрике Q_1 прямые A_0A_3 образуют связку с центром F, точка A_i ($i=1,2$) описывает линию, инцидентную плоскости π с касательной A_iB, где B –точка пересечения прямой PF с плоскостью π.

Библиографический список

1.Ц а п е н к о В.П. Об одном классе конгруэнций $(P,Q)_{2,2}$ || Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат.сб. науч .тр. | Калинингр.ун-т. Калининград, 1979.Вып.10.С.141-147.