лономные конгруэнции имеют на каждой прямой общие фокусы и общие фокальные плоскости.

Забавно, что в литературе я не нашел исследований по теории эллиптических неголономных конгруэнций. С.П.Фиников ограничивается замечанием о том, что в комплексной области их теория совпадает с теорией гиперболических неголономных конгруэнций. Это, конечно, так, но, однако же, теория вещественных эллиптических конгруэнций так же отличается от теории вещественных гиперболических конгруэнций, как теория поверхностей положительной кривизны отличается от теории поверхностей отрицательной кривизны. Что касается геометрии эллиптических неголономных конгруэнций, то, например, в отличие от гиперболического случая не существует никаких специальных неголономных комплексов, содержащих заданную эллиптическую неголономную конгруэнцию.

Из вышеизложенного следует, что неголономная линейчатая геометрия тесно связана с геометрией многообразий фигур, развиваемой в Калининградской геометрической школе.

V.V. K a i s e r

NONHOLONOMIC RULED GEOMETRY AND GEOMETRY
OF MANIFOLDS OF FIGURES

Mathematical content of the letter from V.V.Kaiser to V.S.Malakhovsky is brouht about the nonholonomic congruences and nonholonomic complexes of lines in three-dimensional projective space. The connection was indicated with the differential geometry of manifolds of figures.

УДК 514.75

О КОНФОРМНОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E^n

Г.В. К у з н е ц о в

(Тульский государственный педагогический университет)

Пусть соответствие $f: \Omega \to \overline{\Omega}$ является конформным , где Ω и $\overline{\Omega}$ - области в евклидовом пространстве E^n и $y=f(x)$, при этом $x \in \Omega$, $y \in \overline{\Omega}$. Через

$g_{AB}=(\vec{e}_A\vec{e}_B)$ и $\bar{g}_{AB}=(\vec{a}_A\vec{a}_B)$ обозначим метрические тензоры областей Ω и $\bar{\Omega}$ в точках x и y соответственно, при этом индексы $A,B,C,...$ пробегают значения от 1 до n . Элементы длины в этих областях записываются в виде :

$$ds^2=g_{AB}\omega^A\omega^B\ ,\ d\bar{s}^2=\bar{g}_{AB}\omega^A\omega^B\ .$$

Для конформного отображения f имеем $d\bar{s}^2=\lambda^2 ds^2$, где λ - коэффициент конформности , зависящий только от точки x, т.е. $\lambda=\lambda(x)$. Положим $\lambda=e^{\alpha}$. Тогда

$$\bar{g}_{AB}=e^{2\alpha}g_{AB}\ . \qquad (1)$$

Присоединим к точке x множество всех реперов $\{x,\vec{e}_A\}$ с началом в этой точке . Положим $\vec{a}_A=f_x^*(\vec{e}_A)$, где f_x^* - касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f_x^* - невырожденное отображение, то вектора $\vec{a}_A$ независимы и образуют репер в области $\bar{\Omega}$ с началом в точке y.

Уравнения перемещения реперов $\{x,\vec{e}_A\}$ и $\{y,\vec{e}_A\}$ запишем в виде

$$\begin{cases} d\vec{x}=\omega^A\vec{e}_A\ ,\ d\vec{e}_A=\omega_A^B\vec{e}_B\ ; \\ d\vec{y}=\bar{\omega}^A\vec{a}_A\ ,\ d\vec{a}_A=\bar{\omega}_A^B\vec{a}_B\ ; \end{cases} \qquad (2)$$

1-формы , входящие в эти уравнения , удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства :

$$\begin{cases} D\omega^A=\omega^B\wedge\omega_B^A\ ,\ D\omega_B^A=\omega_B^C\wedge\omega_C^A\ ; \\ D\bar{\omega}^A=\bar{\omega}^B\wedge\bar{\omega}_B^A\ ,\ D\bar{\omega}_B^A=\bar{\omega}_B^C\wedge\bar{\omega}_C^A\ . \end{cases} \qquad (3)$$

Тензоры g_{AB} и $\bar{g}_{AB}$ в силу (2) удовлетворяют уравнениям

$$dg_{AB}=g_{AC}\omega_B^C+g_{CB}\omega_A^C\ ,\ d\bar{g}_{AB}=\bar{g}_{AC}\bar{\omega}_B^C+\bar{g}_{CB}\bar{\omega}_A^C\ . \qquad (4)$$

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\bar{\Omega}$ 1-формы ω^A и $\bar{\omega}^A$ связаны равенствами

$$\bar{\omega}^A=\omega^A. \qquad (5)$$

Эти равенства представляют собой основные дифференциальные уравнения конформного соответствия f. Дифференцируя их внешним образом и применяя лемму Картана , получим

$$\bar{\omega}_B^A-\omega_B^A=h_{BC}^A\omega^C\ , \qquad (6)$$

где $h_{BC}^A=h_{CB}^A$ - симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f.

Дифференцируя равенство (1) с помощью формул (5) , получим

$$g_{AC}(\overline{\omega}_B^C-\omega_B^C)+g_{CB}(\overline{\omega}_A^C-\omega_A^C)=2g_{AB}d\alpha\ .$$

Так как $\alpha=\alpha(x)$, то

$$d\alpha=\alpha_A\omega^A\ . \tag{7}$$

Используя (6) и (7) , получим

$$g_{AS}h_{BC}^S+g_{BS}h_{AC}^S=2g_{AB}\alpha_C\ .$$

Из этих соотношений находятся компоненты тензора конформной деформации евклидовой связности пространства E^n [1] :

$$h_{BC}^A=\delta_B^A\alpha_C+\delta_C^A\alpha_B-g_{BC}\alpha^A\ , \tag{8}$$

где δ_B^A - символ Кронекера . Подставляя (8) в (6) , получим

$$\overline{\omega}_B^A-\omega_B^A=\delta_B^A d\alpha+\alpha_B\omega^A-\alpha^A\omega_B\ , \tag{9}$$

где $\alpha^A=g^{AB}\alpha_B$, $\omega_A=g_{AB}\omega^B$.

Найдем дифференциальные продолжения соотношений (7) и (9). Дифференцируя первые из них , получим

$$\nabla\alpha_A\wedge\omega^A=0\ , \tag{10}$$

где $\nabla\alpha_A=d\alpha_A-\alpha_B\omega_A^B$ - ковариантный дифференциал ковектора α_A . Из соотношений (10) в силу леммы Картана следует , что

$$\nabla\alpha_A=\alpha_{AB}\omega^B\ , \tag{11}$$

где $\alpha_{AB}=\alpha_{BA}$. Далее , дифференцируя уравнения (9) , найдем

$$\left(\nabla\alpha_A-\alpha_A d\alpha+\beta\omega_A\right)\wedge\omega_B-\left(\nabla\alpha_B-\alpha_B d\alpha+\beta\omega_B\right)\wedge\omega_A=0\ , \tag{12}$$

где $\beta=\frac{1}{2}g^{AB}\alpha_A\alpha_B$.Введем обозначения

$$\nabla\alpha_A-\alpha_A d\alpha+\beta\omega_A=\left(\alpha_{AB}-\alpha_A\alpha_B+\beta g_{AB}\right)\omega^B=\tilde{\alpha}_{AB}\omega^B\ , \tag{13}$$

где

$$\tilde{\alpha}_{AB}=\alpha_{AB}-\alpha_A\alpha_B+\beta g_{AB} \tag{14}$$

также симметричный тензор . Подставляя (14) в (12) , получим

$$\left(\tilde{\alpha}_{AC}g_{BS}-\tilde{\alpha}_{BC}g_{AS}\right)\omega^C\wedge\omega^S=0\ ,$$

откуда следует , что

$$\tilde{\alpha}_{AC}g_{BS}-\tilde{\alpha}_{BC}g_{AS}-\tilde{\alpha}_{AS}g_{BC}+\tilde{\alpha}_{BS}g_{AC}=0\ . \tag{15}$$

Свертывая последнее соотношение с g^{AC} - контравариантными компонентами тензора g_{AB} , найдем

$$(n-2)\tilde{\alpha}_{BS}=-\tilde{\alpha}g_{BS}\ ,$$

где $\tilde{\alpha}=g^{AC}\tilde{\alpha}_{AC}$.

При $n=2$ из последней системы следует , что $\tilde{\alpha}=0$. Но нас больше интересует случай $n>2$. В этом случае имеем

$$\widetilde{\alpha}_{BS} = -\frac{1}{n-2}\widetilde{\alpha} g_{BS}.$$

Подставляя эти выражения в (15) , получим $\widetilde{\alpha} = 0$, в силу чего и $\widetilde{\alpha}_{BS} = 0$. Теперь из (14) найдем

$$\alpha_{AB} = \alpha_A \alpha_B - \beta g_{AB} . \qquad (16)$$

Определение. Торсообразующим называется векторное поле V^A, удовлетворяющее в пространстве E^n уравнениям

$$V^A_{,C} = \alpha \delta^A_C + \beta_C V^A .$$

Сам термин “торсообразующее векторное поле” введен К.Яно [2] и объясняется тем , что в евклидовом пространстве E^n направления этого поля , проходящие через точки произвольной линии , образуют торс .

В евклидовом пространстве можно опустить индекс A :

$$V_{A,C} = \alpha g_{AC} + \beta_C V_A . \qquad (17)$$

Сравнивая (16) и (17) , приходим к выводу , что векторное поле α^A является торсообразующим . То есть конформное отображение $f : \Omega \to \overline{\Omega}$ определяет в области Ω торсообразующее векторное поле .

Для геометрической интерпретации полученного результата рассмотрим в E^n подповерхности уровня коэффициента конформности α - эквиконформные гиперповерхности . Выберем репер в E^n так , чтобы вектора $\vec{e}_n$ были ортогональны к этим гиперповерхностям и имели единичную длину , а вектора $\vec{e}_i$ $\left(i, j = \overline{1, n-1}\right)$ касались этих гиперповерхностей . Тогда будут выполняться соотношения

$$\left(\vec{e}_i \vec{e}_j\right) = g_{ij} , \left(\vec{e}_i \vec{e}_n\right) = 0 , \left(\vec{e}_n \vec{e}_n\right) = 1,$$

$$g_{ij}\omega^j_n + \omega^n_i = 0 , \omega^n_n = 0$$

и, кроме того, $d\alpha = \alpha_n \omega^n$. Так как в этом случае $\alpha_i = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha_n\right)^2$ и, согласно (11) и (16), имеем $\nabla \alpha_A = \alpha_A d\alpha - \beta \omega_A$, то

$$\omega^n_i = \tfrac{1}{2}\alpha_n \omega_i , d\alpha_n = \tfrac{1}{2}\left(\alpha_n\right)^2 \omega^n . \qquad (18)$$

На эквиконформной гиперповерхности $d\alpha = 0$, $\omega^n = 0$. Уравнение гиперповерхности записывается в виде

$$\omega^n = 0 , \qquad (19)$$

1-формы ω^i будут базисными на этой гиперповерхности. Дифференциальное продолжение уравнения (19) дает

$$\omega_i^n = b_{ij}\omega^j , \tag{20}$$

где $b_{ij} = b_{ji}$ - асимптотический тензор данной гиперповерхности, а $\varphi = b_{ij}\omega^i\omega^j$ - ее асимптотическая квадратичная форма .

В силу первого из соотношений (18) и из равенства (20) получаем $b_{ij} = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}$, т.е. эквиконформные гиперповерхности являются гиперсферами S^{n-1}.

Найдем центр и радиус эквиконформной гиперсферы S^{n-1} . При $\omega^n = 0$ имеем

$$d\vec{x} = \omega^i\vec{e}_i , \quad d\vec{e}_n = \omega_n^i\vec{e}_i .$$

Но в силу того , что $g_{ij}\omega_n^j + \omega_i^n = 0$, имеем

$$\omega_n^i = -g^{ij}\omega_j^n = -\tfrac{1}{2}\alpha_n\omega^i . \tag{21}$$

Поэтому $d\vec{e}_n = -\frac{1}{2}\alpha_n\omega^i\vec{e}_i$. Так как при $\omega^n = 0$ из второго равенства (18) следует, что $d\alpha_n = 0$, то

$$d\left(\vec{x} + \frac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n\right) = \vec{0} .$$

Поэтому точка $\vec{z} = \vec{x} + \dfrac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n$ является центром эквиконформной гиперсферы и так как $\left|\vec{e}_n\right| = 1$, то ее радиус $R = \dfrac{2}{\alpha_n}$. Выражение

$$d\vec{z} = \left(\omega^n - 2\frac{d\alpha_n}{\alpha_n^2}\right)\vec{e}_n$$

обращается в нуль в силу второго равенства (18) . Следовательно , все эквиконформные гиперсферы имеют общий центр в точке $\vec{z} = \vec{x} + \dfrac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n$, т.е. являются концентрическими гиперсферами в E^n.

При конформном отображении f эквиконформные гиперсферы S^{n-1} перейдут в эквиконформные гиперсферы $\bar{S}^{n-1}$, которые также будут концентрическими .

Аналогично , как это делалось для гиперсферы S^{n-1}, можно показать , что точка $\vec{z} = \vec{y} - \frac{2}{\alpha_n}\vec{a}_n$ будет центром гиперсферы $\bar{S}^{n-1}$ и ее радиус $\bar{R} = \frac{2\lambda}{\alpha_n}$.

Так как для эквиконформной гиперсферы $\alpha_i = 0$, то векторное поле α^A будет коллинеарно вектору $\vec{e}_n$, перпендикулярному эквиконформной гиперсфере S^{n-1} . Векторное поле α^A , которое согласно А.П.Нордену назовем вектором конформного преобразования , будет перпендикулярно к гиперсфере S^{n-1} в каждой ее точке и все прямые , на которых направление задается с помощью вектора α^A, будут проходить через точку $\vec{z} = \vec{x} + \frac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n$ - центр соответствующей гиперсферы. То есть векторное поле α^A будет специальным видом торсообразующего векторного поля , а именно конкуррентным или сходящимся векторным полем [3]. Нами доказана

Теорема . *Конформное отображение* $f\colon \Omega \to \bar{\Omega}$ *определяет в области* Ω *сходящееся векторное поле* .

Замечание . Эту теорему можно также сформулировать следующим образом : вектор конформного преобразования является сходящимся векторным полем в E^n .

Библиографический список

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

2. Yano K . On torse-forming directions in Riemannian spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1944. V. 20. P. 701-705.

3. Широков П. А. О конкуррентных направлениях в римановых пространствах // Известия физ.-мат. о-ва, 1939. Сер. 3. Т.7. С. 77 - 97.

G.V.K u z n e t s o v

ABOUT THE CONFORMAL CORRESPONDENCE BETWEEN THE DOMAINS OF THE EUCLIDEAN SPACE E^n

A geometric meaning of the vector of the conformal transformation is uncovered. To this aim the concept of the undersurfaces of the level of the conformality coefficient of the equiconformal hypersurfaces is introduced. It is shown that the equiconformal hypersurfaces are hyperspheres. The vector of the conformal transformation in each point of the hypersphere will be perpendicular to it. All the lines on which the

direction is given by the vector of the conformal transformation will go through the centre of the corresponding hypersphere. From here follows the theorem: the conformal map $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ defines a convergent vector field in the domain Ω.