УДК 514.75

Б.А.А н д р е е в

ИНВАРИАНТНАЯ МЕТРИКА В ГЕОМЕТРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВО НУЛЬ-ПАР

Продолжается изучение дифференцируемого отображения φ [5] проективного пространства P_N в пространство $R(p,\pi)$ нуль-пар (p,π) проективного пространства P_n, причем $N=\operatorname{rang}(p,\pi)$ [1, с.181]. Показано, что к отображению φ инвариантным образом присоединяется аффинная связность Γ, которая является для отображения φ аналогом связности Г.Врэнчану [3]-известного понятия теории точечных соответствий. Доказано, что связность Γ совпадает с аффинной связностью, порожденной инвариантной метрикой пространства $R(p,\pi)$ [4]. Выясняется роль геодезических пространства $R(p,\pi)$ в интерпретации характеристических направлений отображения φ. В статье используются обозначения, применяемые в [5], [6].

1. Введенный в [5, с.11] геометрический объект

$$\Gamma^L_{JK}=V^L_i\Lambda^i_{JK}+V^{Li}\Lambda_{iJK} \tag{1}$$

охватывается фундаментальным объектом второго порядка отображения φ и подчиняется следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\Gamma^L_{JK}=-\Gamma^T_{JK}\Omega^L_T+2\Gamma^L_{T(J}\Omega^T_{K)}-\Gamma^L_{JK}\Omega^0_0-2\delta^L_{(J}\Omega^0_{K)}+\Gamma^L_{JKP}\Omega^P_0, \tag{2}$$

где скобки означают симметрирование. Из (1) следует, что для Γ^L_{JK} выполняется

$$\Lambda^i_{JK}=\Gamma^L_{JK}\Lambda^i_L,\quad \Lambda_{iJK}=\Gamma^L_{JK}\Lambda_{iL}. \tag{3}$$

Г.Врэнчану предложил связывать с соответствием двух проективных пространств аффинную связность [3],[2]. Сравнивая формулы (5.2)[2], определяющие объект связности Врэнчану с соотношениями (3), приходим к выводу, что объект $\Gamma^{L'}_{JK}$ является для отображения φ аналогом объекта связности Врэнчану точечного отображения.

2. Рассмотрим определенную на $R(p,\pi)$ квадратичную форму

$$F=-2\omega^i_0\omega^0_i. \qquad (4)$$

Легко показать, что форма (4) не вырождена, а ее положительный и отрицательный индексы равны n. Из (I.4)[5] следует, что при отображении φ ей соответствует определенная на P_n квадратичная форма

$$\Phi=M_{JK}\Omega^J_0\Omega^K_0, \qquad M_{JK}=2\Lambda_{i(J}\Lambda^i_{K)}. \qquad (5)$$

Ограничиваясь случаем $\operatorname{rang}\varphi=N$ на всей области определения, получаем для матрицы $[M_{JK}]$, составленной из компонентов тензора M_{JK}: $\det[M_{JK}]\neq 0$. Таким образом, существует тензор M^{JK}, взаимный к M_{JK}: $M^{JK}M_{KL}=\delta^J_L$. Из (1.12)[5] получаем

$$M^{JK}=2V^{(J}_iV^{K)i}. \qquad (6)$$

Компоненты тензора M^{JK} удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$dM_{JK}=2M_{L(J}\Omega^L_{K)}-2M_{JK}\Omega^0_0+M_{JKL}\Omega^L_0, \qquad (7)$$

где для величин M_{JKL} из (1.5)[5] получаем

$$M_{JKL}=2\Lambda^i_{(J}\Lambda_{|i|K)L}+2\Lambda_{i(J}\Lambda^i_{K)L}. \qquad (8)$$

Квадратичная форма (4) и соответствующая ей при отображении φ квадратичная форма (5) определяют на $R(p,\pi)$ и P_N структуру псевдориманова пространства индекса n. Инвариантная метрика в пространстве нуль-пар рассматривалась в [4]. Из формулы (42)[4] получаем для линейного элемента $ds^2=-2\omega^i_0\omega^0_i$, что совпадает с метрикой, определяемой формой [4].

Известно, что в римановом и псевдоримановом пространстве существует единственная аффинная связность без кручения, сохраняющая скалярные произведения при параллельном переносе. Найдем выражение для объекта связности.

$$\gamma^L_{JK}=\frac{1}{2}M^{TL}(M_{TKJ}+M_{JTK}-M_{JKT}), \qquad (9)$$

соответствующей метрике $ds^2=\Phi$. Из (6) и (8) получаем

$$\gamma^L_{JK}=V^{Li}\Lambda_{iJK}+V^L_i\Lambda^i_{JK}. \qquad (10)$$

Таким образом, Γ^L_{JK}[1] действительно определяет в P_N аффинную связность, и справедливо следующее предложение.

Т е о р е м а 1. Определяемый объектом Γ^L_{JK} аналог связности Врэнчану для отображения φ совпадает с аффинной связностью, порожденной инвариантной метрикой пространства нуль-пар.

3. Кривая ℓ: $R\to P_N$

$$\tilde{X}^J=\Lambda^Jt+\frac{1}{2}M^Jt^2+\langle 3\rangle \qquad (11)$$

будет геодезической псевдориманова пространства с метрикой Φ, если

$$M^J=-\Gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L. \qquad (12)$$

Пусть ℓ -геодезическая. Так как рассматриваемая структура псевдориманова пространства перенесена в P_N отображением φ, кривая $\varphi\circ\ell$ является геодезической в $R(p,\pi)$.

Т е о р е м а 2. Инфлексионные [6, с.10] в элементе (p^0,π^0) кривые $R\to R(p,\pi)$ характеризуются тем, что имеют в этом элементе геометрическое касание второго порядка с геодезическими псевдориманова пространства $R(p,\pi)$ с метрикой $ds^2=F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (11),(12) в уравнения (1.6)[5] отображения, получаем для геодезической $\varphi\circ\ell$ (2.1)[6]: $m^i=0$, $\mu_i=0$. Таким образом, геодезическая в $R(p,\pi)$ имеет в (p^0,π^0) геометрическое касание второго порядка со всеми инфлексионными в (p^0,π^0) кривыми (2.1),(2.3)[6].

4.Получаем следующую геометрическую интерпретацию характеристических направлений отображения φ.

Т е о р е м а 3. Направление в точке $P\in P_N$ будет характеристическим направлением отображения φ в том и только в том случае, если образ прямой, определяющей это направление, имеет в $\varphi(P)$ геометрическое касание второго порядка с геодезической пространства с метрикой $ds^2=F$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.1. статьи [6] и теоремы 2.

Список литературы

1.Малаховский В.С.Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,1969,с.179-206.

2.Рыжков В.В.Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. -"Геометрия 1963" Итоги науки.ВИНИТИ АН СССР,1965,с.65-107.

3.Vrănceanu G. Sul. tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proettivi. Boll. unione mat. ital., 1957, 12, N4, 489-506.

4.Розенфельд Б.А. Проективная геометрия как метрическая геометрия.-Тр.семинара по векторному и тензорн. анализу.1950.Вып.8,с.328-354.

5.Андреев Б.А.Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.-В кн.Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.5.Калининград, 1974,с.6-24.

6.Андреев Б.А. Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12.Калининград,1981,с.8-12.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.15 1984

УДК 514.75

Г.П. Б о ч и л л о

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ П-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В данной работе рассматриваются m-распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства P_n. В смысле [1] Δ_m являются распределениями касательных элементов, порожденных m-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов. Под гиперплоским элементом $\{A,\alpha\}$, как и в [2], понимается пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n. Во всех трех случаях $(m<n,\ m=n,\ n<m<2n-1)$ дается геометрическая характеристика распределения. Доказывается, что задание распределения Δ_m на M_{2n-1} в каждом случае означает одновременно задание и некоторого дополнительного распределения Δ^*_{2n-m-1}. Дается его геометрическая характеристика. Доказывается, что распределение Δ_m на M_{2n-1} $(m<n)$ (пфаффова структура [3] на M_{2n-1}) порождает псевдориманову структуру на этом многообразии.

В работе индексы принимают следующие значения: $I,J,K=0,\overline{1,n}$; $i,j,k=\overline{1,n}$; $p,q,r=\overline{1,n-1}$; в случае $m<n$: $u,v,w=\overline{1,m-1}$; $\bar{u},\bar{v},\bar{w}=\overline{m,n-1}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m-1},n$; в случае $n<m<2n-1$ $(m=n+m_0-1)$: $a,b,c=1,m_0-1$; $\bar{a},\bar{b},\bar{c}=\overline{m_0,n-1}$. Кроме того, оператор ∇ обозначает известную [3] операцию и $\omega^i\equiv\omega_0^i$; $\omega_p\equiv\omega_p^n$.

I.Распределения Δ_m на M_{2n-1}. Присоединим к каждому элементу $\{A,\alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R=\{A_J\}$ и тангенциальные $\tau=\{\alpha^J\}$ подвижные реперы, деривационные формулы которых имеют вид $dA_J=\omega_J^K A_K$, $d\alpha^J=-\omega_K^J\alpha^K$, причем I-формы ω_J^K удовлетворяют условиям $d\omega_J^K=\omega_J^I\wedge\omega_I^K$, $\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^n=0$. Положив $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$, перейдем к