Учитывая уравнение (3.8) и системы (3.6) и (3.3) убеждаемся, что пары $\mathcal{L}'_0$ существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Точки $N_1(0, \frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ и $N_2(0, -\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ пересечения ребра $\{A\bar{e}_2\}$ репера с коникой F_1, входящей в пару $\mathcal{L}'_0$, являются её фокальными точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (3.8) коэффициент последнего уравнения системы (3.7) обращается в нуль. Таким образом теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Две оставшиеся фокальные точки коники F_1 определяются из системы уравнений:

$$(x^1)^2 + a(x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \quad bx^1 + cx^2 + \ell = 0 \qquad (3.9)$$

Л и т е р а т у р а

1. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве, Труды геометрического семинара, 2, 1969, ВИНИТИ

2. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского матем. общества), 2, 1953, ГИТТЛ.

3. Ткач Г.П., Пары конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве, Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 2 (Тр. Калининградского ун-та), 1971.

4. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно-расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. Настоящий сборник.

5. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М., 1956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 3 1973

ШЕВЧЕНКО Ю.И.

КЛАССЫ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ.

В n-мерном аффинном пространстве рассмотрены N-параметрические многообразия пар плоскостей, с помощью которых произведена классификация аффинных связностей. Показано, что специальная точечная аффинная связность (введенная в работе) обобщает индуцированную связность $(N = m)$ и классическую связность $(N = k)$.

Пусть в n-мерное аффинное пространство погружено N-параметрическое многообразие пар плоскостей $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_m)$, где $\mathcal{L}_k$ – центрированная k-плоскость, $\mathcal{L}'_m$ – m-плоскость. Ограничимся рассмотрением таких пар плоскостей, для которых

$$\mathcal{L}_k \not\subset \mathcal{L}'_m \qquad (1)$$

и плоскости $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}'_m$ имеют ровно

$$p = \dim(\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}'_m) \qquad (2)$$

общих несобственных точек (линейно независимых).

Многообразие пар плоскостей $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_m)$ будем называть:

1) точечным, если $p = 0$,

2) линейным, если $p > 0$,

3) специальным, если $n + p - k - m = 0$,

4) общим, если $n+p-k-m>0$,

5) вырожденным, если $\mathcal{L}'_m \subset \mathcal{L}_k$, либо если $m=0$.

Рассмотрим общее линейное многообразие $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k,\mathcal{L}'_m)$. Вершину A репера $\{A,\bar e_u,\bar e_\alpha,\bar e_a,\bar e_i\}$ поместим в центр $\mathcal{L}_k$, векторы $\bar e_u$ направим параллельно $\mathcal{L}_k \cap \mathcal{L}'_m$, $\bar e_\alpha$ расположим в плоскости $\mathcal{L}_k$, $\bar e_a$ -параллельно плоскости $\mathcal{L}'_m$.

Деривационные формулы репера примут вид:

$$d\bar A = \omega^u \bar e_u + \omega^\alpha \bar e_\alpha + \omega^a \bar e_a + \omega^i \bar e_i ,$$

$$d\bar e_u = \omega_u^v \bar e_v + \omega_u^\alpha \bar e_\alpha + \omega_u^a \bar e_a + \omega_u^i \bar e_i ,$$

$$d\bar e_\alpha = \omega_\alpha^u \bar e_u + \omega_\alpha^\beta \bar e_\beta + \omega_\alpha^a \bar e_a + \omega_\alpha^i \bar e_i , \qquad (3)$$

$$d\bar e_a = \omega_a^u \bar e_u + \omega_a^\alpha \bar e_\alpha + \omega_a^b \bar e_b + \omega_a^i \bar e_i ,$$

$$d\bar e_i = \omega_i^u \bar e_u + \omega_i^\alpha \bar e_\alpha + \omega_i^a \bar e_a + \omega_i^j \bar e_j ,$$

где

$$u,v = 1,2,\ldots,p; \quad \alpha,\beta = p+1,\ldots,k;$$
$$(4)$$
$$a,b,c = k+1,\ldots,k+m-p; \quad i,j = k+m-p+1,\ldots,n.$$

Уравнения общего линейного многообразия $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_k,\mathcal{L}'_m)$ запишутся в виде:

$$\omega_u^\alpha = \Lambda^\alpha_{u\gamma}\theta^\gamma, \qquad \omega_u^a = \Lambda^a_{u\gamma}\theta^\gamma,$$

$$\omega_u^i = \Lambda^i_{u\gamma}\theta^\gamma, \qquad \omega_\alpha^a = \Lambda^a_{\alpha\gamma}\theta^\gamma, \qquad (5)$$

$$\omega_\alpha^i = \Lambda^i_{\alpha\gamma}\theta^\gamma, \qquad \omega_a^\alpha = \Lambda^\alpha_{a\gamma}\theta^\gamma,$$

$$\omega_a^i = \Lambda^i_{a\gamma}\theta^\gamma, \qquad \omega^u = \Lambda^u_\gamma \theta^\gamma,$$
$$(5)$$
$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_\gamma \theta^\gamma, \qquad \omega^a = \Lambda^a_\gamma \theta^\gamma, \qquad \omega^i = \Lambda^i_\gamma \theta^\gamma,$$

где

$$\mathcal{D}\theta^\gamma = \theta^\varkappa \wedge \theta^\gamma_\varkappa \quad (\gamma,\varkappa = 1,\ldots,N). \qquad (6)$$

Продолжая систему (5), получим:

$$\nabla\Lambda^\alpha_{u\gamma} + \Lambda^i_{u\gamma}\omega_i^\alpha = \Lambda^\alpha_{u\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^a_{u\gamma} + \Lambda^i_{u\gamma}\omega_i^a = \Lambda^a_{u\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^i_{u\gamma} = \Lambda^i_{u\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^a_{\alpha\gamma} - \Lambda^a_{u\gamma}\omega_\alpha^u + \Lambda^i_{\alpha\gamma}\omega_i^a = \Lambda^a_{\alpha\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^i_{\alpha\gamma} - \Lambda^i_{u\gamma}\omega_\alpha^u = \Lambda^i_{\alpha\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{a\gamma} - \Lambda^\alpha_{u\gamma}\omega_a^u + \Lambda^i_{a\gamma}\omega_i^\alpha = \Lambda^\alpha_{a\gamma\varkappa}\theta^\varkappa, \qquad (7)$$

$$\nabla\Lambda^i_{a\gamma} - \Lambda^i_{u\gamma}\omega_a^u = \Lambda^i_{a\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^u_\gamma + \Lambda^\alpha_\gamma\omega_\alpha^u + \Lambda^a_\gamma\omega_a^u + \Lambda^i_\gamma\omega_i^u = \Lambda^u_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_\gamma + \Lambda^i_\gamma\omega_i^\alpha = \Lambda^\alpha_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^a_\gamma + \Lambda^i_\gamma\omega_i^a = \Lambda^a_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

$$\nabla\Lambda^i_\gamma = \Lambda^i_{\gamma\varkappa}\theta^\varkappa,$$

где, например,

$$\nabla\Lambda^{i}_{\sigma} = d\Lambda^{i}_{\sigma} - \Lambda^{i}_{\varkappa}\theta^{\varkappa}_{\sigma} + \Lambda^{\beta}_{\sigma}\omega^{i}_{\beta}.$$

Из деривационных формул (3) видно, что формы

$$\omega^{\alpha},\ \omega^{i},\ \omega^{\beta}_{\alpha},\ \omega^{i}_{\alpha},\ \omega^{\alpha}_{u},\ \omega^{i}_{u} \tag{8}$$

определяют смещение $\mathcal{L}_{\kappa}$ без учета компонент, параллельных плоскости $\mathcal{L}'_{m}$. Эти формы (8) мы будем называть формами сверхсвязности. Формы сверхсвязности (8) образуют относительно инвариантную [1] систему форм Пфаффа.

Зададим оснащение в смысле Г.Ф.Лаптева [3] общего линейного многообразия $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_{\kappa}, \mathcal{L}'_{m})$:

$$\begin{aligned}
&\nabla\Gamma^{\alpha}_{i} + \omega^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha}_{i\sigma}\theta^{\sigma},\\
&\nabla\Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i} + \delta^{\gamma}_{\beta}\omega^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i\sigma}\theta^{\sigma},\\
&\nabla\Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{u}_{\beta} = \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma\sigma}\theta^{\sigma},\\
&\nabla\Gamma^{\alpha u}_{\beta i} + \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\omega^{u}_{\gamma} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{i} = \Gamma^{\alpha u}_{\beta i\sigma}\theta^{\sigma}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Теперь можно определить формы общей линейной аффинной связности ($O\Lambda$ -связности):

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{i}\omega^{i},\\
&\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\omega^{i}_{\gamma} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{u} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta i}\omega^{i}_{u}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Эти формы удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}\tilde{\omega}^{\alpha} = \tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} + \tfrac{1}{2}T^{\alpha}_{\sigma\varkappa}\theta^{\sigma}\wedge\theta^{\varkappa},\\
&\mathfrak{D}\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + \tfrac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\sigma\varkappa}\theta^{\sigma}\wedge\theta^{\varkappa},
\end{aligned} \tag{11}$$

где "тензор" кручения имеет вид

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}T^{\alpha}_{\sigma\varkappa} = {} & \Lambda^{a}_{\sigma}\Lambda^{\alpha}_{a\varkappa} + \Lambda^{u}_{\sigma}\Lambda^{\alpha}_{u\varkappa} + \Lambda^{i}_{\sigma}\Gamma^{\alpha}_{i\varkappa} - \\
& - \Gamma^{\alpha}_{i}(\Lambda^{\beta}_{\sigma}\Lambda^{i}_{\beta\varkappa} + \Lambda^{a}_{\sigma}\Lambda^{i}_{a\varkappa} + \Lambda^{u}_{\sigma}\Lambda^{i}_{u\varkappa}) + \\
& + (\Lambda^{\beta}_{\sigma} - \Gamma^{\beta}_{i}\Lambda^{i}_{\sigma})(\Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa} + \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\Lambda^{\gamma}_{u\varkappa} + \Gamma^{\alpha u}_{\beta i}\Lambda^{i}_{u\varkappa}),
\end{aligned} \tag{12}$$

а "тензор" кривизны

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\sigma\varkappa} = {} & \Lambda^{a}_{\beta\sigma}\Lambda^{\alpha}_{a\varkappa} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta i}(\Lambda^{\gamma}_{u\sigma}\Lambda^{i}_{\gamma\varkappa} + \Lambda^{a}_{u\sigma}\Lambda^{i}_{a\varkappa}) - \\
& - \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i}\Lambda^{a}_{\gamma\sigma}\Lambda^{i}_{a\varkappa} - \Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma}\Lambda^{a}_{u\sigma}\Lambda^{\gamma}_{a\varkappa} + \\
& + \Lambda^{i}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i\varkappa} + \Lambda^{\gamma}_{u\sigma}\Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma\varkappa} + \Lambda^{i}_{u\sigma}\Gamma^{\alpha u}_{\beta i\varkappa} - \\
& - \Gamma^{\gamma\eta}_{\beta i}\Gamma^{\alpha\xi}_{\gamma j}\Lambda^{i}_{\eta\sigma}\Lambda^{j}_{\xi\varkappa} - \Gamma^{\gamma u}_{\beta\eta}\Gamma^{\alpha v}_{\gamma\xi}\Lambda^{\eta}_{u\sigma}\Lambda^{\xi}_{v\varkappa} - \\
& - \Gamma^{\gamma u}_{\beta j}\Gamma^{\alpha v}_{\gamma j}\Lambda^{i}_{u\sigma}\Lambda^{j}_{v\varkappa} + 2\Gamma^{\gamma}_{\beta}[{}^{\eta}_{i}\Gamma|^{\alpha}_{\gamma}|^{v}_{\xi}]\Lambda^{i}_{\eta\sigma}\Lambda^{\xi}_{v\varkappa} + \\
& + 2\Gamma^{\gamma}_{\beta}[{}^{\eta}_{i}\Gamma|^{\alpha}_{\gamma}|^{v}_{j}]\Lambda^{i}_{\eta\sigma}\Lambda^{j}_{v\varkappa} + 2\Gamma^{\gamma}_{\beta}[{}^{u}_{\eta}\Gamma|^{\alpha}_{\gamma}|^{v}_{j}]\Lambda^{\eta}_{u\sigma}\Lambda^{j}_{v\varkappa},
\end{aligned} \tag{13}$$

причем в правых частях выражений "тензоров" $T^{\alpha}_{\sigma\varkappa}$ и $R^{\alpha}_{\beta\sigma\varkappa}$ произведено альтернирование по индексам $\sigma, \varkappa$.

Заметим, что объект (9) охватывается фундаментальным объектом первого порядка общего линейного многообразия $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_{\kappa}, \mathcal{L}'_{m})$ в предположении существования относительного инварианта $I = I(\Lambda^{i}_{u\sigma})$

(см. [41]), для которого

$$dI = I[p(n+p-k-m)\theta^{\gamma}_{\gamma} + N(n+p-k-m)\omega^{u}_{u} - pN\omega^{i}_{i}] + I_{\gamma}\theta^{\gamma}. \qquad (14)$$

в) В этом случае можно ввести тензор $V^{u\gamma}_{i}$, связанный с тензором $\Lambda^{i}_{u\gamma}$ следующими соотношениями:

$$V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{u\varkappa} = p(n+p-k-m)\,\delta^{\gamma}_{\varkappa},$$

$$V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{v\gamma} = N(n+p-k-m)\,\delta^{u}_{v}, \qquad (15)$$

$$V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{j}_{u\gamma} = pN\delta^{j}_{i}$$

Тогда можно положить:

$$\Gamma^{\alpha}_{i} = \frac{1}{pN}V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{\alpha}_{u\gamma}\ ;\ \Gamma^{\alpha\gamma}_{\beta i} = \delta^{\gamma}_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{i},$$

$$\Gamma^{\alpha u}_{\beta\gamma} = \frac{1}{N(n+p-k-m)}\delta^{\alpha}_{\gamma}V^{u\gamma}_{i}\Lambda^{i}_{\beta\gamma}, \qquad (16)$$

$$\Gamma^{\alpha u}_{\beta i} = \frac{1}{p-k}\Gamma^{\gamma u}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{i}.$$

Аналогичным образом рассматривается общее линейное вырожденное многообразие и соответствующая ему ОЛВ -связность, а также многообразия:

1) специальное точечное (СТ -связность),

2) специальное линейное (СЛ-связность) и специальное линейное вырожденное (СЛВ -связность),

3) общее точечное (ОТ-связность) и общее точечное вырожденное (ОТВ-связность).

Классификацию полученных аффинных связностей можно представить в виде:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{СТ} & \\
\text{СЛ} \arrow[ur] \arrow[d] & \text{ОЛ} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \text{ОТ} \arrow[ul] \arrow[d] \\
\text{СЛВ} & \text{ОЛВ} \arrow[l] \arrow[r] & \text{ОТВ}
\end{tikzcd}$$

где стрелка указывает на то, что выражения "тензоров" кручения и кривизны одной связности можно получить из соответствующих выражений другой, если в них опустить все члены, в которых по одному из индексов u, a, i производится суммирование.

Рассмотрим два важных класса специальной точечной аффинной связности (СТ-связности):

1) $N = m$.

Примем формы ω^{a} за независимые, тогда уравнения (5) можно записать в виде:

$$\omega^{a}_{\alpha} = \Lambda^{a}_{\alpha b}\omega^{b},\ \omega^{\alpha}_{a} = \Lambda^{\alpha}_{ab}\omega^{b},\ \omega^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{b}\omega^{b}. \qquad (17)$$

Уравнения (11) примут вид:

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha} = \omega^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta} + \frac{1}{2}T^{\alpha}_{ab}\,\omega^{a}\wedge\omega^{b},$$

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma} + \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta ab}\,\omega^{a}\wedge\omega^{b}, \qquad (18)$$

где

$$T^{\alpha}_{ab} = 2\Lambda^{\alpha}_{[ab]},\quad R^{\alpha}_{\beta ab} = 2\Lambda^{c}_{\beta[a}\Lambda^{\alpha}_{|c|b]}. \qquad (19)$$

Из уравнений (18) видно, что мы получили индуцированную связность [2].

2) $N = k$.

Примем формы ω^{α} за независимые, тогда:

$$\omega^a_\alpha = \Lambda^a_{\alpha\beta}\,\omega^\beta, \quad \omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{a\beta}\,\omega^\beta, \quad \omega^a = \Lambda^a_\alpha\,\omega^\alpha. \tag{20}$$

Уравнения (II) примут вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + \tfrac{1}{2} T^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \\ \mathcal{D}\omega^\alpha_\beta &= \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \tfrac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\eta}\,\omega^\gamma \wedge \omega^\eta, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = 2\Lambda^a_{[\beta}\Lambda^\alpha_{|a|\gamma]}, \quad R^\alpha_{\beta\gamma\eta} = 2\Lambda^a_{\beta[\gamma}\Lambda^\alpha_{|a|\eta]} \tag{22}$$

Из уравнений (2I) видно, что мы получили классическую аффинную связность.

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия оснащенных многообразий фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та), 197I, вып. 2, с.5-I9.

2. Лумисте Ю.Г., Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. Вузов "Математика", №6, 1965, с.93-I02

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. (Труды Московского математического общества), ГИТТЛ, М., 1953, 2, с.275-383.

4. Остиану Н.М., Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. (Труды геом. семинара ВИНИТИ), т.2, 1969, с.247-262.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур

при Калининградском университете.

В предыдущем выпуске освещена работа семинара до 5 мая 197Iг. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 20 октября 197I года по I7 мая I972 года.

20.X.197Iг. М а л а х о в с к и й В.С., Касательно-оснащенные многообразия фигур.

27.X.197Iг. Ш е в ч е н к о Ю.И., Классификация аффинных связностей.

3.XI.197Iг. А н д р е е в Б.А., О дифференциальной геометрии соответствий между точечным пространством и пространством нуль-пар.

I0.XI.197Iг. М а х о р к и н В.В., Некоторые типы многообразий гиперквадрик.

I7.XI.197Iг. П о п о в Ю.И., Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства.

24.XI.197Iг. Т к а ч Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.

I.XII.197Iг. Н о в о ж и л о в а Т.П., Вырожденые конгруэнции квадратичных пар в A_3, порожденных эллипсом и точкой.

I7.XII.197I. И в л е в Е.Т. (Томск), Дифференциальная геометрия обобщенных эквипараметрических многообразий, связанных с многомерной поверхностью.