9. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.;Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.

A.V. Stolyarov

INTERIOR GEOMETRY OF PROJECTIVELY–METRIC SPACES

Some problems of interior geometry of normalized projectively–metric spaces with absolut are studied. It is proved, that the interior geometry of normalized space with nondegenerate absolut is Weyl geometry if and only if the normalization is polar. This geometry is Riemannian one with a constant curvature.

УДК 514.76

А.Я. Султанов

(Пензенский государственный педагогический университет)

ОБ ИНТРАНЗИВНЫХ ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Доказано, что размерность интранзивной группы движений пространств аффинной связности A_n не больше, чем n^2-$2n+3$, если тензор кручения T связности удовлетворяет условию $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$.

Пусть M_n – связное многообразие класса C^∞, $L(M_n) = P$ – расслоение линейных реперов, ∇- линейная связность, заданная на M_n. Если тензор кручения $T\neq 0$ и удовлетворяет условию $T = I \otimes \omega - \omega \otimes I$, то максимальная размерность интранзивных групп движений равна точно n^2+1. Этот результат был получен И.П. Егоровым [1].

Предположим, что пространство $A_n=(M_n,\nabla)$ такое, что $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$ и допускает интранзивную группу G аффинных преобразований. Обозначим через $g(G)$ алгебру Ли инфинитезимальных аффинных преобразований группы G. Отображение $f : g(G) \to T_{x_0'}(P)$ по закону $f(X) = X^{(0)}_{x_0'}$ инъективно [2]. Здесь $X^{(0)}$ – полный лифт векторного поля X, $T_{x_0'}(P)$ – касательное пространство к расслоению P в точке x_0'.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in M_n$, в которой T не обращается в нуль, x_0' – некоторая точка из P, принадлежащая слою над x_0. Выберем на M_n локальную карту (U,x^i) так, чтобы $x_0 \in U$ и в локальном представлении

$X=\xi^i\partial_i \in g(G)$ последняя компонента была тождественно равна нулю в $U: \xi^n=0$ Такая карта, в силу интранзитивности группы G, существует [3]. При аффинных преобразованиях тензор кручения T инвариантен, поэтому $L_x T=0$. В частности, в точке x_0 будем иметь

$$\xi^m(x_0)\partial_m T^i_{jk}(x_0)+T\begin{pmatrix} i & s \\ jk & m\end{pmatrix}\xi^m_s=0, \tag{1}$$

где $\xi^m_s=\partial_s\xi^m(x_0)$, $T\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m\end{smallmatrix}\right)=\delta^s_j T^i_{mk}(x_0)+\delta^s_k T^i_{jm}(x_0)-\delta^i_m T^s_{jk}(x_0)$.

Так как

$$X^{(0)}_{x'_0}=\xi^m(x_0)\partial^0_m+\xi^m_k x^k_\alpha \partial^\alpha_m,$$

то координаты вектора $X^{(0)}_{x'_0}$ относительно базиса $\partial^0_m,\ x^k_\alpha\partial^\alpha_m$ касательного пространства $T_{x'_0}(P)$ удовлетворяют системе (1). Отсюда следует, что если ранг матрицы $A=\left\|T\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m\end{smallmatrix}\right)\right\|$ равен ρ, то $dimG=dimg(G)\le n^2\text{-}1\text{-}\rho$.

Лемма 1. *Если составляющая* T^n_{ab} *($a\neq b$ и $a,b\neq n$) в точке x_0 отлична от нуля, то*

$$r(A)\geq 3n\text{-}6 \text{ и } dimG\leq n^2\text{-}3n\text{+}5.$$

Доказательство. Можно считать $T^n_{12}(x_0)\neq 0$. Рассмотрим матрицу B, составленную из коэффициентов при неизвестных $\xi^s_n\ (s\neq n), \xi^2_m, \xi^1_m, \xi^1_1$ (m≠1,2,n) в уравнениях $\binom{h}{12}(h\neq n), \binom{n}{1k}, \binom{n}{2k}\ (k\neq 1,2,n), \binom{n}{12}$ системы (1).
Из определения $T\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m\end{smallmatrix}\right)$ имеем

$$T\left(\begin{smallmatrix} h \\ 12\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} n \\ s\end{smallmatrix}\right)=-\delta^h_s T^n_{12},\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 1k\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} n \\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 1k\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} m \\ 2\end{smallmatrix}\right)=\delta^m_k T^n_{12},$$
$$T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2k\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} n \\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2k\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} m \\ 2\end{smallmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 2k\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} m \\ 1\end{smallmatrix}\right)=\delta^m_k T^n_{21},$$
$$T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 12\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} n \\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 12\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} m \\ 2\end{smallmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 12\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} m \\ 1\end{smallmatrix}\right)=0,\quad T\left(\begin{smallmatrix} n \\ 12\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ 1\end{smallmatrix}\right)=T^n_{12}.$$

Таким образом, матрица B имеет следующее строение

$$B=\begin{pmatrix} -E_{n-1}T^n_{12} & * & * & * \\ 0 & E_{n-3}T^n_{12} & * & * \\ 0 & 0 & E_{n-3}T^n_{21} & * \\ 0 & 0 & 0 & T^n_{12}\end{pmatrix}.$$

Здесь E_p – единичная матрица порядка p. Отсюда следует, что $r(B)=3n\text{-}6$. Следовательно, $r(A)\geq 3n\text{-}6$ и $dimG\le n^2\text{-}1\text{-}3n\text{+}6=n^2\text{-}3n\text{+}5$.

Лемма 2. *Если* $T^1_{23}(x_0)\neq 0$, *то* $r(A)\geq 3n-7$ *и* $dimG\leq n^2-3n+6$.

Доказательство. Матрица B, составленная из коэффициентов при ξ_1^s $(s \neq 1; n)$, ξ_m^2, ξ_m^3 $(m > 3)$, ξ_1^1 в уравнениях $\binom{h}{23}$ $(h \neq 1; n)$, $\binom{1}{3k}, \binom{1}{2k} (k > 3)$, $\binom{1}{23}$ системы (1), имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} -E_{n-2}T_{23}^1 & * & * & * \\ 0 & E_{n-3}T_{32}^1 & * & * \\ 0 & 0 & E_{n-3}T_{23}^1 & * \\ 0 & 0 & 0 & -T_{23}^1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому *r(B)=3n-7*. Отсюда следуют утверждения леммы 2.

Лемма 3. *Если* $T_{2n}^1(x_0) \neq 0$, *то* $r(A) \geq 2n\text{-}4$ $dimG \leq n^2\text{-}2n\text{+}3$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу *B*, составленную из коэффициентов при ξ_1^s $(s \neq 1; n)$, ξ_m^2 $(m \neq 1,2,n)$, ξ_2^2 в уравнениях $\binom{h}{2n}$ $(h \neq 1; n)$, $\binom{1}{kn}(k \neq 1,2,n)$, $\binom{1}{2n}$. Матрица *B* имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} E_{n-2}T_{n2}^1 & * & * \\ 0 & E_{n-3}T_{2n}^1 & * \\ 0 & 0 & T_{2n}^1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следуют утверждения леммы 3.

Возможны еще два случая:

(а) все составляющие вида $T_{\beta\gamma}^{\alpha}$ равны нулю при различных α, β, γ.

Существует составляющая вида $T_{ab}^a(x_o) \neq 0$ $(a \neq b$ и $a,b \neq n)$;

(б) все составляющие, описанные в пункте (а) равны нулю, а $T_{an}^a(x_0) \neq 0$.

В случае (б) можно считать $T_{1n}^1(x_0) \neq 0$. Так как $T_{jk}^i \neq \delta_j^i \varphi_k - \delta_k^i \omega_j$, то существует составляющая $T_{bn}^b \neq T_{1n}^1$. Можно считать, что $T_{2n}^2 \neq T_{1n}^1$. В окрестности *U* перейдем к новым координатам по формулам

$$\bar{x}^1 = \frac{1}{2}\left(x^1 + x^2\right), \bar{x}^2 = \frac{1}{2}\left(x^1 - x^2\right), \bar{x}^h = x^h \quad (h > 2).$$

Тогда $\bar{T}_{2n}^1 = \frac{1}{2}\left(T_{1n}^1 - T_{2n}^2\right) \neq 0.$ Поэтому случай (б) сводится к случаю, рассмотренному в лемме 3. В случае (а) существенным является только случай

$$T_{12}^1 = \ldots = T_{n-1\,2}^{n-1} \neq T_{n2}^n.$$

Лемма 4. *Если* $T_{12}^1 = \ldots = T_{n-1\,2}^{n-1} \neq T_{n2}^n$, *то* $r(A) \geq 2n\text{-}4$ *и* $dimG \leq n^2\text{-}2n\text{+}3$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу B, составленную из коэффициентов при ξ_m^2 $(m \neq 1,2,n)$, ξ_n^s $(s \neq 1;n)$, ξ_2^2 в уравнениях $\binom{2}{k2}$ $(k \neq 1,2,n)$, $\binom{h}{n2}(h \neq 1,n)$, $\binom{h}{n2}, (h \neq 1;n)$, $\binom{3}{23}$. Матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} E_{n-3}T_{21}^1 & * & * \\ 0 & E_{n-2} \cdot \left(T_{12}^1 - T_{n2}^n\right) & * \\ 0 & 0 & T_{12}^1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, r(B)= 2n-4.

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Если тензор кручения T пространства $A_n=(M_n, \nabla)$ удовлетворяет условию $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$, то размерность интранзитивной группы движений этого пространства не больше, чем n^2-$2n+3$.*

Приведенная в теореме граница точная. Рассмотрим пространство $A_n=(R^n, \nabla)$, где ∇ задана компонентами вида

$$\Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{32}^1 = \left(x^2\right)^2 + 1, \text{ остальные } \Gamma_{jk}^i = 0.$$

Максимальная группа аффинных преобразований этого пространства интранзитивна и имеет размерность n^2-$2n+3$.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Максимально подвижные L_n полусимметрической связности // Докл. АН СССР. 1952.Т. 84. № 3. С. 433-435.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.I. 344 с.
3. *Эйзерхарт Л.* Непрерывные группы преобразований. М.:ИЛ. 1947. 359 с.

A.Ya. Sultanov

ON THE INTRANSITIVE GROUPS OF MOTION OF SPACES OF AFFINE CONNECTIONS

It is proved that the dimension of intransitive groups of motion of spaces of affine connection A_n is not more than n^2-$2n+3$, if torsion tensor T satisfies the condition $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$.

УДК 514.76

Н.С. Султанова