УДК 514.76

К. В. Полякова

ПСЕВДОВЕКТОР И ЕГО ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ

Рассматриваются ковариантная производная касательного вектора и псевдовектора относительно аффинной связности. Описываются параллельные перенесения касательного вектора и псевдовектора.

Covariant derivatives of tangent tensor and pseudotensor are considered. Parallel displacements of tangent tensor and pseudotensor are described.

Ключевые слова: тензор и псевдотензор, ковариантная производная тензора и псевдотензора, параллельное перенесение вектора и псевдовектора.

Key words: tensor and pseudotensor, covariant derivative of tensor and pseudotensor, parallel displacement of tensor and pseudotensor.

1. Параллельное перенесение вектора

Рассмотрим касательное пространство $TX_m = span(\varepsilon_i)$ к многообразию X_m в некоторой его точке и произвольное касательное векторное поле $v = v^i \varepsilon_i \in TX_m$. Дифференцируя вектор v, получим

$$dv = \varepsilon_i (dv^i + v^j \omega_j^i) + v^i \varepsilon_{ij} \omega^j, \qquad (1)$$

$T^2 X_m = span(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ — соприкасающееся пространство (т. е. касательное пространство 2-го порядка). Условия инвариантности вектора v можно записать в виде

$$\Delta v^i = v_j^i \omega^j \ \ (\Delta v^i = dv^i + v^j \omega_j^i), \qquad (2)$$

тогда $dv = v_i \omega^i$, где $v_i = v_i^j \varepsilon_j + v^j \varepsilon_{ji}$. Компоненты v^i образуют тензор, при этом $\overline{d} v = 0$, где $\overline{d} = d\big|_{\omega^i = 0}$ — дифференциал при фиксации точки базы, т. е. дифференциал в слое, а не на всем расслоении. Слоевые формы ω_j^i расслоения линейных реперов LX_m при $\omega^i = 0$ становятся инвариантными формами $\overline{\omega}_j^i = -\overset{*}{x}{}_j^k dx_k^i$ линейной группы L=$GL(m)$ [4, с. 161].

Рассмотрим классический тензорный закон преобразований для вектора v: $\hat{v}^i = v^j \overset{*}{x}{}_j^i$ $(v^i = \hat{v}^j x_j^i)$. Полагая $\omega^i = 0$ и $d\hat{v}^i = 0$, найдем $\overline{d} v^i$:

$\overline{d}v^i = \hat{v}^j dx^i_j = v^k \overset{*}{x}{}^j_k dx^i_j = -v^j \overline{\omega}^i_j$, т.е. приходим к тензорному закону Г. Ф. Лаптева $\overline{\Delta}v^i = 0$, где $\overline{\Delta}v^i = dv^i + v^k \overline{\omega}^i_k$, который на расслоении имеет вид уравнений $\Delta v^i = v^i_j \omega^j$ или сравнений $\Delta v^i_j \equiv 0 \pmod{\omega^k}$. Значит, классический тензор — это тензор Лаптева при $\omega^i = 0$.

Интегрируя уравнения $\overline{\Delta}v^i = 0$, также получаются соотношения $v^i = \overline{v}^j x^i_j$ [2, с. 23].

Ковариантный дифференциал и ковариантные производные компонент v^i относительно аффинной связности Γ^i_{jk} имеют вид $\nabla v^i = dv^i + v^j \widetilde{\omega}^i_j$, $\nabla_j v^i = v^i_j - v^k \Gamma^i_{kj}$, где $\widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k$ — формы аффинной связности, при этом $\nabla v^i = \omega^j \nabla_j v^i$. Внешний дифференциал от ковариантного дифференциала имеет следующий вид:

$$D(\nabla v^i) = \nabla v^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + \tfrac{1}{2} R^i_{jkl} v^j \omega^k \wedge \omega^l .$$

Если связность является плоской ($R^i_{jkl} = 0$), то $D(\nabla v^i) = \nabla v^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j$, т.е. система $\nabla v^i = 0$, задающая параллельное перенесение вектора, вполне интегрируема.

Уравнение (1) принимает вид

$$dv = \varepsilon_i \nabla v^i + v^i \widetilde{\varepsilon}_{ij} \omega^j , \tag{3}$$

где $\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \Gamma^k_{ij}\varepsilon_k$; $HT^2X_m = span(\widetilde{\varepsilon}_{ij})$ — горизонтальное подпространство связности Γ^i_{jk} [8; 10]. Вектор $v = v^i \varepsilon_i$ переносится параллельно в аффинной связности Γ^i_{jk}, если его инфинитезимальное смещение лежит в горизонтальном подпространстве HT^2X_m [9, с. 95]. Действительно, если $\nabla v^i = 0$, то $dv = v^i \widetilde{\varepsilon}_{ij} \omega^j$.

2. Псевдотензор

Вместо уравнений (2) будем рассматривать выражения

$$\Delta v^i = v^i \Omega + v^i_j \omega^j , \tag{4}$$

которые при фиксации точки базы принимают вид

$$\overline{\Delta} v^i = v^i \Omega . \tag{4'}$$

Усеченным объектом [5], или *псевдотензором* [10, с. 46] называется объект, не являющийся геометрическим объектом, обращение которого в нуль имеет инвариантный смысл. Понятия псевдотензора и псевдовектора используются также в другом смысле (см., напр.: [1, с. 23; 7, с. 238]).

Будем говорить, что объект v с компонентами v^i, удовлетворяющими уравнениям (4), образует псевдовектор. С учетом уравнений (4) выражение (1) принимает следующий вид:

$$dv = v\Omega + v_i \omega^i ,$$

при этом $\overline{d}v = v\overline{\Omega}$. Значит, псевдовектор v задает касательное направление.

Рассмотрим случаи правильной продолжаемости уравнений (4). Дифференцируя (4), получим

$$(\Delta v^i_j + v^k \omega^i_{kj} - v^i_j \Omega) \wedge \omega^j + v^i D\Omega = 0 . \tag{5}$$

Чтобы найти уравнения на пфаффовы производные v^i_j псевдовектора v^i, требуется применение леммы Картана в выражении (5), что возможно в двух случаях: $D\Omega = \Omega_j \wedge \omega^j$ или $D\Omega = 0$. Если $D\Omega = \Omega_j \wedge \omega^j$, то

$$\Delta v^i_j + v^k \omega^i_{kj} - v^i_j \Omega + v^i \Omega_j = v^i_{jk} \omega^k \quad (v^i_{jk} = v^i_{kj}) . \tag{5$'$}$$

Если $D\Omega = 0$, то

$$\Delta v^i_j + v^k \omega^i_{kj} - v^i_j \Omega = v^i_{jk} \omega^k \quad (v^i_{jk} = v^i_{kj}) .$$

Можно конкретизировать вид формы Ω следующими способами:

а) $\Omega = \xi_i dx^i + \xi^j_i dx^i_j$;

б) $\Omega = d \ln f \quad (f = f(x^i, x^i_j))$;

в) $\Omega = d \ln J$, $J = \det x^i_j$.

Рассмотрим подробнее эти случаи во взаимосвязи с правильной продолжаемостью уравнений (4) и параллельным перенесением касательного направления в аффинной связности.

Из уравнений (4) можно предположить, что форма Ω имеет вид $\Omega = \xi_i dx^i + \xi^j_i dx^i_j$. Тогда в фиксированной точке (x^i) имеем $\overline{\Delta} v^i = v^i \xi^j_i dx^i_j$,

$$\overline{d} v^i + v^k \overline{\omega}^i_k = v^i \overline{\Omega} , \tag{6}$$

или подробнее

$$\overline{d} v^i + v^k \overline{\omega}^i_k = v^i \xi^j_i dx^i_j . \tag{6$'$}$$

Переходя от натурального корепера $\{dx^i, dx^i_j\}$ к произвольному $\{\omega^i, \omega^i_j\}$, получим $\Omega = \mu_i \omega^i + \mu^j_i \omega^i_j$, где $\mu_i = \xi_j \overset{*}{x}{}^j_i - \xi^l_j x^j_{ki} x^k_l$, $\mu^j_i = -\xi^k_i x^j_k$. Уравнения на компоненты μ_i, μ^j_i имеют вид

$$\Delta \mu_i = \mu_{ij} \omega^j , \; d\mu^j_i + \mu\left[{}^k_i \, \omega^j_k\right] = \mu^j_{ik} \omega^k ,$$

где альтернирование по парам индексов имеет вид $\mu\left[{}^k_i \, \omega^j_k\right] = \frac{1}{2} (\mu^k_i \omega^j_k - \mu^j_k \omega^k_i)$. В этом случае

$$D\Omega=\mu_{ij}\omega^j\wedge\omega^i+\mu^j_{ik}\omega^k\wedge\omega^i_j+\mu^j_i\omega^k\wedge\omega^i_{jk},$$

т. е.

$$D\Omega=\Omega_i\wedge\omega^i\ \ (\Omega_i=\mu_{ij}\omega^j-\mu^j_{ki}\omega^k_j-\mu^j_k\omega^k_{ji}). \tag{7}$$

Значит, уравнения (4) правильно продолжаемы и с учетом (5′) и (7) дают

$$\Delta v^i_j+v^k\omega^i_{kj}-v^i_j\Omega+v^i(\mu_{jk}\omega^k-\mu^l_{kj}\omega^k_l-\mu^l_k\omega^k_{lj})=v^i_{jk}\omega^k\quad(v^i_{jk}=v^i_{kj}).$$

Рассмотрим законы преобразований

$$\hat{v}^{\mathrm{i}}=v^{\mathrm{j}}\overset{*}{x}{}^i_j\overset{*}{f},\ v^{\mathrm{i}}=\hat{v}^{\mathrm{j}}x^i_jf,\ \overset{*}{f}\cdot f=1,\ f=f(x^i,x^j_k).$$

Считая $\omega^i=0$ и $d\hat{v}^{\mathrm{i}}=0$, найдем $\bar{d}v^i$:

$$\bar{d}v^{\mathrm{i}}=\hat{v}^{\mathrm{j}}(dx^i_jf+x^i_jdf)=v^{\mathrm{k}}\overset{*}{x}{}^j_k\overset{*}{f}(fdx^i_j+x^i_jdf),$$

откуда

$$\bar{d}v^i=-v^j\overline{\varpi}^i_j+v^i\overset{*}{f}df. \tag{8}$$

Сравнивая выражения (6) и (8), получим $\overline{\Omega}=\overset{*}{f}\bar{d}f=\bar{d}\ln f$, а учитывая (6′), имеем $\xi^j_i=\overset{*}{f}\partial^j_if$. Будем также считать, что $\xi_i=\overset{*}{f}\partial_if$. Тогда $\Omega=\overset{*}{f}df=d\ln f$. В этом случае $D\Omega=0$. Следовательно, закон $\hat{v}^{\mathrm{i}}=v^{\mathrm{j}}\overset{*}{x}{}^i_j\overset{*}{f}$ соответствует заданию псевдовектора (направления).

Если $\overset{*}{f}=\det(x^i_j)=J$, то закон $\overline{v}^i=v^j\overset{*}{x}{}^i_jJ$ определяет относительный тензор. Значит, относительный тензор является частным случаем псевдотензора Остиану — Шевченко. В этом случае $\Omega=\overset{*}{J}dJ=d\ln J$.

3. Параллельное перенесение псевдовектора

Из (4) следует, что в самом общем случае ковариантный дифференциал и ковариантные производные псевдовектора имеют вид

$$\overset{\Omega}{\nabla}v^i=dv^i+v^j\widetilde{\omega}^i_j-v^i\Omega,\ \overset{\Omega}{\nabla}_jv^i=v^i_j-v^k\Gamma^i_{kj}.$$

Замечание. В [6] для описания параллельного перенесения произвольного направления на поверхности проективного пространства рассматривалась аналогичная конструкция на поверхности проективного пространства, названная *проективно-ковариантным дифференциалом*.

Внешний дифференциал от ковариантного дифференциала приведем к виду

$$D\overset{\Omega}{\nabla}v^i=\overset{\Omega}{\nabla}v^j\wedge(\widetilde{\omega}^i_j-\delta^i_j\Omega)+\tfrac{1}{2}R^i_{jkl}v^j\omega^k\wedge\omega^l-v^iD\Omega.$$

Если связность является плоской ($R^i_{jkl}=0$), то

$$D\overset{\Omega}{\nabla} v^i = \overset{\Omega}{\nabla} v^j \wedge (\tilde{\omega}^i_j - \delta^i_j \Omega) - v^i D\Omega,$$

и система $\overset{\Omega}{\nabla} v^i = 0$, задающая параллельное перенесение направления, вполне интегрируема, если $D\Omega = 0$. Уравнение (1) принимает вид

$$dv = \varepsilon_i \overset{\Omega}{\nabla} v^i + v\Omega + v^i \tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^j .$$

Утверждение. *Касательное направление, т. е. псевдовектор* $v = v^i\varepsilon_i$, *переносится параллельно в аффинной связности* Γ^i_{jk}, *если его инфинитезимальное смещение лежит в подпространстве* $\mathrm{span}(v, \tilde{\varepsilon}_{ij})$.

Доказательство. Действительно, если $\overset{\Omega}{\nabla} v^i = 0$, то $dv = v\Omega + v^i\tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^j$.

Если $\Omega = \mu_i\omega^i + \mu^j_i\omega^i_j$, то ковариантный дифференциал и ковариантные производные псевдовектора имеют вид

$$\overset{\mu}{\nabla} v^i = dv^i + v^j\tilde{\omega}^i_j - v^i\mu^k_j\tilde{\omega}^j_k ,\quad \overset{\mu}{\nabla}_j v^i = v^i_j - v^k\Gamma^i_{kj} + v^i\mu_j + v^i\mu^k_l\Gamma^l_{kj} .$$

Ковариантные производные псевдовектора образуют псевдотензор вместе с ковариантными производными $\nabla_j\mu^k_l$, так как

$$\Delta(\overset{\mu}{\nabla}_j v^i) \equiv \Omega\overset{\mu}{\nabla}_j v^i + v^i\omega^l_k\nabla_j\mu^k_l .$$

Тогда выражения (1) имеют вид

$$dv = \varepsilon_i \overset{\mu}{\nabla} v^i + v(\mu^k_j\tilde{\omega}^j_k) + v^i\tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^j .$$

Как и в общем случае с дифференциалом $\overset{\Omega}{\nabla} v^i$, справедливо утверждение о параллельном перенесении направления. Действительно, если $\overset{\mu}{\nabla} v^i = 0$, то $dv = v(\mu^k_j\tilde{\omega}^j_k) + v^i\tilde{\varepsilon}_{ij}\omega^j$.

При $\Omega = \overset{*}{f}\, df = d\ln f$ имеем $D\Omega = 0$, значит, система уравнений $\overset{f}{\nabla} v^i = 0$ является вполне интегрируемой в плоской связности.

Найдем ковариантные производные относительного вектора, считая, что они образуют относительный тензор того же веса. Тогда [3, с. 278]

$$\overset{J}{\nabla}_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma^i_{kj} + v^i\,\frac{\overset{*}{J}\,\partial J}{\partial x^j} ,$$

а учитывая $(\Gamma^i_{jk}) = \overset{*}{J}\dfrac{\partial J}{\partial x^j}$, получим

$$\overset{J}{\nabla}_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma^i_{kj} + v^i\Gamma^k_{jk} . \ \square$$

Список литературы

1. *Абрамов А.* . Введение в тензорный анализ и риманову геометрию. М., 2012.

2. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

3. *Катанаев М.О.* Геометрические методы в математической физике : курс лекций. 2015.

4. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

5. *Остиану Н.М.* Геометрических объектов теория // Мат. энц. М., 1984. Т. 1. С. 937.

6. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып. 27. С. 63—70.

7. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967.

8. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

9. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии оснащенных подмногообразий аффинного пространства // Итоги науки и техн. Сер.: Пробл. геом. 1989. Т. 21. С. 93—107.

10. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономного и неголономного гладких многообразий. Калининград, 1998.

Об авторе

Катерина Валентиновна Полякова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: polyakova_@mail.ru

About author

Dr Katerina Polyakova — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: polyakova_@mail.ru

УДК 512.742.2

А. А. Смирнов

ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ ОБОБЩЕНИЙ ТЕОРЕМЫ ДОЙРИНГА О РЕДУКЦИИ

Исследуются различные обобщения теоремы Дойринга о редукции. Выясняется, что наиболее подходящей для дальнейшего уточнения является теорема, связывающая разложение $p\square_K$ на простые идеалы с разложением $A[p]$ на неразложимые BT_1-групповые схемы с точностью до изоморфизма. Определяются основные проблемы дальнейшего обобщения теоремы, некоторые пути их решения и ставятся задачи для последующей работы в этом направлении.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 10—15.