кой диссертации "Конформно-дифференциальная геометрия многомерных поверхностей" (М., 1964).

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов// Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т.3. С.29-48.

2. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т.3. С.49-91.

3. Б р о н ш т е й н Р.Ф. Об одном классе многомерных распределений в конформном пространстве // Ткани и квазигруппы / Калининский ун-т. Калинин, 1982. С.18-24.

4. Б р о н ш т е й н Р.Ф. К конформной теории многомерных распределений // Геометрия погруженных многообразий: М., 1983. С.17-25.

5. А к и в и с М.А. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // ДАН СССР. 1952. Т.82. № 3. С.325-328; Мат. сб. Т.31. № 1. 1952. С.43-75.

6. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М., 1976. 432 с.

7. Ф и л о н е н к о Л.Ф. Об инвариантном оснащении квадратичной гиперполосы QH_m в окрестности третьего порядка ее образующего элемента // Латв. мат. ежегодник. Рига, 1986. Вып. 30. С.168-173.

8. Ф и л о н е н к о Л.Ф. Квадратичная гиперполоса и нормальные связности подмногообразия конформного пространства // Уч. зап. Тартусского ун-та. 1988. Вып.803. С.115-132.

9. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. о-ва. 1953. № 2. С.275-382.

10. О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. геометр. семинара. М., 1971. Т.3. С.95-114.

11. Schouten J.A. Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeit mit quadratischer Mass-Bestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Bestimmung // Math. Ztschr. 1927. Bd. 11.- S. 58-88.

УДК 514.7

ЕДИНИЧНОЕ ТОРСООБРАЗУЮЩЕЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

И.И.Ц ы г а н о к, С.Е.С т е п а н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

1. Введение. Рассмотрим n-мерное многообразие M с аффинной связностью ∇. Выделим на M векторное поле ξ. В области своего задания поле ξ порождает тензорное поле A, такое, что

$$AX = \nabla_X \xi \tag{1.1}$$

для любого $X \in TM$. Векторное поле ξ называется торсообразующим, если существует функция $\lambda: M \to R$ и 1-форма θ на M, такие, что

$$A = \lambda\, id + \theta \otimes \xi. \tag{1.2}$$

Очевидно, что интегральными кривыми торсообразующего векторного поля служат геодезические линии.

Рассмотрим 1-мерное распределение $\Delta(\xi)$, каждое векторное поле ξ^* которого имеет вид $\xi^* = f\xi$ для некоторой функции $f: M \to R$. Если поле ξ, порождающее $\Delta(\xi)$, является торсообразующим, то торсообразующим будет и поле ξ^*. Действительно, из (1.2) и $A^* = \nabla \xi^*$ последует

$$A^*X = (f\lambda)X + \{\theta(X) + f^{-1}X(f)\}\,\xi^*. \tag{1.3}$$

На этом основании говорят о торсообразующем поле 1-мерных направлений $\Delta(\xi)$.

Термин "торсообразующее поле направлений" принадлежит К. Яно [11]. В частности, им было доказано, что в евклидовом n-мерном пространстве направления такого поля, проходящие через точки любой кривой, образуют торс. Введение этого понятия оказалось очень плодотворным. Первые итоги исследований торсообразующих векторных полей и смежных вопросов были подведены в монографии [2]. Интерес к торсообразующим векторным полям сохраняется и до настоящего времени (см., например, [3], [4] и [5]). Так, в частности, одним из авторов было доказано в [5], что в n-мерном аффинном пространстве торсообразующее векторное поле принадлежит связке прямых с собственным или несобственным центром. Настоящая статья продолжает исследования торсообразующего векторного поля.

2. Локальная теория. Рассмотрим неизотропное торсообразующее поле направлений $\Delta(\xi)$ на n-мерном многообразии M с псевдоримановой метрикой g сигнатуры $(n-q, q)$ и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть ξ – единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta(\xi)$. Дифференцируя тождество $g(\xi,\xi)=\varepsilon$, где $\varepsilon=\pm 1$, получим $\theta(X)=-\varepsilon\lambda g(X,\xi)$ для любого $X\in TM$. Тогда равенство (I.2) примет вид

$$A=\lambda(id-\varepsilon\eta\otimes\xi), \tag{2.I}$$

где $\eta(X)=g(X,\xi)$ для любого $X\in TM$. Очевидно, что единичное торсообразующее векторное поле ξ является градиентным.

Обозначим через $\xi^{\perp}$ гипперраспределение, ортогональное торсообразующему полю направлений $\Delta(\xi)$. Тогда $h=id-\varepsilon\eta\otimes\xi$ будет оператором ортогонального проектирования на $\xi^{\perp}$. Нетрудно проверить, что

$$g((\nabla_Z h)X,Y)=\mu(Y)g(hX,Z)+\mu(X)g(Z,hY) \tag{2.2}$$

для $\mu=-\varepsilon\lambda\eta$ и любых X, Y и Z из TM. В этом случае на основании теоремы 4 работы [6] заключаем, что M является локально почти полуприводимым многообразием. А потому справедлива

Т е о р е м а I. Псевдориманово многообразие M вдоль интегральных кривых неизотропного торсообразующего поля направлений расслаивается на I-параметрическое семейство ортогональных им вполне омбилических гиперповерхностей. При этом метрическая форма M в соответствующей локальной системе координат $x^1,\dots,x^n$ приводится к виду

$$ds^2=\varepsilon(dx^1)^2+e^{f(x^1,\dots,x^n)}\sum_{a,b=2}^{n}g_{ab}(x^2,\dots,x^n)\,dx^a dx^b.$$

Условие интегрируемости уравнений $\nabla_X\xi=AX$ векторного поля ξ имеют вид тождеств Риччи [7, с.127]

$$(\nabla_X A)Y-(\nabla_Y A)X=R(X,Y)\xi, \tag{2.3}$$

где X и Y суть произвольные векторные поля на M. Последние уравнения в случае единичного торсообразующего векторного поля принимают следующий вид

$$X(\lambda)[Y-\varepsilon\eta(Y)\xi]-Y(\lambda)[X-\varepsilon\eta(X)\xi]-\varepsilon\lambda^2[\eta(Y)X-\eta(X)Y]=R(X,Y)\xi. \tag{2.4}$$

В произвольной точке многообразия M секционная кривизна

$K(X,Y)$ в невырожденном 2-мерном направлении $X\wedge Y$ вычисляется по формуле

$$K(X,Y)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}. \tag{2.5}$$

Выберем в произвольной точке $x\in M$ невырожденное 2-мерное направление Π, содержащее $\Delta(\xi_x)$, а в Π – произвольный единичный ортогональный ξ_x вектор Y_x. Тогда из (2.5) на основании (2.4) последует

$$K(\xi,Y)=-[\xi(\lambda)+\varepsilon\lambda^2].$$

Правая часть этого равенства не зависит от Y, а потому справедлива

Т е о р е м а 2. Если псевдориманово многообразие M допускает неизотропное торсообразующее поле направлений $\Delta(\xi)$, то секционные кривизны в произвольной точке x этого многообразия для всех невырожденных 2-мерных направлений, содержащих $\Delta(\xi_x)$, равны между собой.

З а м е ч а н и е. Частным видом торсообразующего векторного поля является конциркулярное [2], т.е. такое ξ, что $A=\lambda id$. Из (I.3) видно, что $\Delta(\xi)$ содержит конциркулярное векторное поле ξ^* только в случае градиентности 1-формы θ. Если же ξ – единичное торсообразующее векторное поле, то ξ^* будет конциркулярным, если $(\mathrm{grad}\,\lambda)\wedge\eta=0$. В этом случае из уравнений (2.2) выводится [6], что многообразие M является локально полуприводимым с метрической формой вида

$$ds^2=\varepsilon(dx^1)^2+e^{f(x^1)}\sum_{a,b=2}^{n}g_{ab}(x^2,\dots,x^n)\,dx^a dx^b \tag{2.6}$$

и факт этот хорошо известен.

3. Глобальная теория. Пусть M компактное ориентированное псевдориманово многообразие с глобально заданным неизотропным торсообразующим полем направлений $\Delta(\xi)$. Справедлива следующая интегральная формула [5]:

$$\int_M[Ric(\xi,\xi)+\mathrm{trace}\,A^2-(\mathrm{trace}\,A)^2]\,dv=0,$$

где

$$dv=\sqrt{|\det\|g\||}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n.$$

Для $A=\lambda(id-\varepsilon\eta\otimes\xi)$ формула принимает вид

$$\int_M[Ric(\xi,\xi)-(n-1)(n-2)\lambda^2]\,dv=0. \tag{3.I}$$

Если предположить, что $n>2$ и $Ric(\xi,\xi)\leqslant 0$, то из (3.I) выведем: $Ric(\xi,\xi)=0$ и $\lambda=0$. В этом случае M будет локально приводимым многообразием с метрической формой вида

$$ds^2=\varepsilon(dx^1)^2+\sum_{a,b=2}^{n} g_{ab}(x^2,\dots,x^n)\,dx^a dx^b. \qquad (3.2)$$

Если же при $Ric(\xi,\xi)\leq 0$ существует точка, где $Ric(\xi,\xi)<0$, тогда (3.I) вступит в противоречие со сделанным только что предположением. Доказана

Т е о р е м а 3. Пусть M – компактное ориентированное псевдориманово многообразие размерности $n>2$.

(A) Если для всех неизотропных направлений $Ric\leq 0$, то любое глобально заданное неизотропное торсообразующее поле направлений на M содержит ковариантно постоянное векторное поле. При этом метрика M приводится к виду (3.2).

(B) Если для всех неизотропных направлений $Ric\leq 0$ и в некоторой точке $Ric<0$, то на M нельзя задать глобально неизотропное торсообразующее поле направлений.

Полагаем теперь M полным римановым многообразием с глобально заданным торсообразующим полем направлений $\Delta(\xi)$. Поскольку интегральными кривыми $\Delta(\xi)$ служат геодезические, а распределение $\xi^{\perp}$ – интегрируемое, то согласно [8] при $Ric_M\geq 0$ многообразие M будет локально приводимым. А $\Delta(\xi)$ в результате будет содержать ковариантно постоянное векторное поле. Справедлива

Т е о р е м а 4. Пусть M – полное риманово многообразие с глобально заданным торсообразующим полем направлений $\Delta(\xi)$. Если $Ric_M\geq 0$, то $\Delta(\xi)$ содержит ковариантно постоянное векторное поле, а M является локально приводимым с метрикой вида (3.2) для $\varepsilon=1$.

4. Приложение. Лоренцево многообразие M вместе с непрерывным мнимоединичным векторным полем ξ рассматривают в качестве пространства-времени [10, с.13]. При $n=4$ гладкое ξ принимается в качестве поля скоростей "космологической жидкости", текущей через пространство-время. При этом имеет место следующее ортогональное разложение [9, с.219]:

$$g(\nabla_X\xi,Y)=\omega(X,Y)+\sigma(X,Y)+\tfrac{1}{3}(\operatorname{div}\xi)\,g(hX,Y)-g(X,\xi)\,g(\dot\xi,Y), \qquad (4.I)$$

где ω – вращательная 2-форма, σ – тензор сдвига и $\dot\xi=\nabla_\xi\xi$ – ускорение "жидкости".

Из разложения (4.I) видно: для того, чтобы векторное поле было торсообразующим, необходимо и достаточно, чтобы $\omega=\sigma=\dot\xi=0$. Это в свою очередь означает, что ξ – поле скоростей равномерного безвихревого и бессдвигового течения "жидкости". Такие условия накладываются на "космологическую жидкость", когда рассматривают "полностью однородную и изотропную Вселенную" [9, с.162, 384, 388]. Пространственно-временную метрику такой Вселенной приводят к виду (2.6) для $\varepsilon=-1$. Если принять во внимание замечание второго пункта, то можем утверждать, что последнее возможно только в случае, когда $[\operatorname{grad}(\operatorname{div}\xi)]\wedge\eta=0$ для $\eta(X)=g(X,\xi)$. Это означает, что пространственноподобные поверхности в M являются поверхностями уровня функции $\operatorname{div}\xi$.

З а м е ч а н и е. Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 94 - 01 - 01595.

Библиографический список

1. Yano K. On the torse-forming direction in a Riemannian space // Proc. Imp. Acad. 1944. V. 20. P. 340-345.

2. Shouten J.A. Ricci calculus. Berlin: Springer, 1954. 516 p.

3. Kowolic Y. On some Riemannian manifolds admitting torse-forming vector fields // Demonstr. math. 1985. V.18. N 3. P. 885-891.

4. Udriste C. Properties of torse-forming vector fields // Tensor. 1985. V 42. N 2. P. 137-142.

5. Ц ы г а н о к И.И. Торсообразующее векторное поле и группа аффинных гомотетий // Ткани и квазигруппы. Калинин, 1988. С.114-119.

6. К р у ч к о в и ч Г.И. Признаки почти полуприводимых римановых пространств // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. 1966. № 13. С.399-406.

7. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

8. Brito F., Walszak P. Totally geodesic foliations with integrable normal bundles // Bol. Soc. Bras. Mat. 1986. V.17. N1. P. 41-46.

9. М и з н е р Ч. и др. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т.2. 525 с.

10. Б и м Дж., Э р л и х П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985. 400 с.