УДК 514.75

СЕТИ ЛИНИЙ БАЗЫЛЕВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ТРЕХСОСТАВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в

(Калининградский государственный университет)

В данной работе продолжаются исследования регулярных трехсоставных распределений [1] – [3], [9], [10] проективного пространства P_n, которые названы $\mathcal{H}$-распределениями. К исследуемому многообразию ($\mathcal{H}$-распределению) присоединяется семейство центропроективных реперов $\mathcal{R}_L(H,M)$ [1], [3]. Найдено многообразие фокальных точек конуса асимптотических направлений H-распределения. Показано, что с Λ-распределением, M-распределением, H-распределением ассоциированы соответственно распределения конусов второго порядка $(\overset{*}{g}_\Lambda)$, $(\overset{*}{g}_M)$, $(\overset{*}{g}_H)$. Дано построение сетей линий проективного пространства [4], индуцированных дополнительно реперированным базисным Λ-распределением и дополнительно реперированным оснащающим M-распределением данного $\mathcal{H}$-распределения. Приведены три конструкции построения сети линий Σ^*_r и сети линий Σ^*_m В.Т.Базылева [5], внутренним инвариантным образом присоединенных соответственно к Λ-распределению и к M-распределению данного $\mathcal{H}$-распределения.

В работе используется следующая схема индексов:

$$\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}\ldots=\overline{1,n};\ \bar{\mathcal{I}},\bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}}=\overline{0,n};\ p,q,r,s,t=\overline{1,r};\ \bar p,\bar q,\bar r,\bar s,\bar t=\overline{0,r};$$
$$i,j,k,\ell,h=\overline{r+1,m};\ a,b,c,d,\ldots=\overline{1,m};\ \bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\ldots=\overline{0,m};\ \alpha,\beta,\gamma,\eta,\delta=$$
$$=\overline{m+1,n-1};\ u,v,w=\overline{r+1,n-1};\ \hat u,\hat v,\hat w=\overline{r+1,n};\ \xi,\rho,\tau,\chi,\varphi=\overline{1,n-1};$$
$$\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\eta=\overline{m+1,n};\quad p_1,q_1,r_1,s_1,t_1=\overline{2,r};\ p_2,q_2,r_2,s_2,t_2=\overline{3,r}.$$

Обозначения и терминология такие же, как и в работах [1], [2], [3], [9], [10].

§ 1. Многообразие фокальных точек конуса асимптотических направлений H-распределения

Известно [1], [3], что конус асимптотических направлений, ассоциированных с текущим элементом H-распределения, определяется системой уравнений

$$a^n_{\sigma\rho}\, y^\sigma y^\rho = 0,\quad y^n = 0, \tag{1.1}$$

где $a^n_{\sigma\rho}=\frac{1}{2}(S^n_{\sigma\rho}+S^n_{\rho\sigma})$ – главный фундаментальный тензор оснащающего H-распределения [1], [3] данного $\mathcal{H}$-распределения, заданный относительно репера $\mathcal{R}_L(H,M)$. Распределение таких конусов (1.1), которое ассоциируется с $\mathcal{H}$-распределением, обозначим $\mathfrak{A}_H$.

О п р е д е л е н и е [6]. Фокальной точкой F текущего элемента распределения $\mathfrak{A}_H$ с центром в точке L_0 называется точка этого элемента, которая принадлежит также (с точностью до величин первого порядка малости) и соседнему элементу этого распределения, полученного смещением центра L_0 в некотором направлении (фокальное направление, соответствующее данной точке F).

Аналогично, следуя работе [6], найдем многообразие фокальных точек элемента распределения $\mathfrak{A}_H$ при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению нормалей Михэйлеску $\mathfrak{M}(L_0)$.

Искомое многообразие определяется системой уравнений

$$y^n=0,\quad y^0-m_\sigma y^\sigma=0\ (a),\quad g_{\sigma\rho}\, y^\sigma y^\rho=0\ (b), \tag{1.2}$$

где величины

$$g_{\sigma\rho}\overset{\mathrm{def}}{=}a^n_{\sigma\rho\tau}M^\tau_n+a^n_{\sigma\rho n}-(a^n_{\sigma\tau}m_\rho+a^n_{\tau\rho}m_\sigma)M^\tau_n-$$
$$-\frac{1}{n-1}\left[(a^n_{\xi\varphi\tau}M^\tau_n-a^n_{\xi\varphi n})a^{\xi\varphi}-2m_\tau M^\tau_n\right]a^n_{\sigma\rho} \tag{1.3}$$

образуют дважды ковариантный симметрический тензор, в общем случае отличный от нуля. Тензор $\{g_{\sigma\rho}\}$ определяет в плоскости элемента H-распределения инвариантный конус второго порядка g_H. Сечение (1.2) этого конуса g_H нормалью 2-го рода $m\{m_\sigma\}$ Михэйлеску, соответствующую нормали $\mathfrak{M}\{M^\sigma_n\}$ [1], [3] – нормали 1-го рода Михэйлеску в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази, и представляет собой многообразие фокальных точек конуса (1.1) асимптотических направлений при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим распределению нормалей $\mathfrak{M}\{M^\sigma_n\}$.

Текущий элемент Λ-распределения пересекает соответствующий конус g_H (1.2) по инвариантному конусу 2-го порядка g_Λ:

$$g_{pq}\, y^p y^q=0,\quad y^{\hat u}=0, \tag{1.4}$$

где величины $\{g_{pq}\}$ образуют дважды ковариантный симметрический тензор, в общем случае отличный от нуля. Таким образом, к Λ-распределению в дифференциальной окрестности 2-го порядка внутренним инвариантным образом присоединяется распределение конусов g_Λ (I.4), которое обозначим $(\overset{*}{g}_\Lambda)$ [3]. Аналогично, к текущему элементу M-распределения (плоскости $M(L_0)$) присоединяется инвариантный конус 2-го порядка g_M:

$$g_{ab}y^a y^b=0,\quad y^{\hat\alpha}=0, \qquad (I.5)$$

вершина которого совпадает с центром L_0 данного $\mathcal{H}$-распределения $(L_0\in\Lambda(L_0)\subset M(L_0)\subset H(\Lambda_0))$.

Величины $\{g_{ab}\}$ образуют дважды ковариантный симметрический тензор, отличный в общем случае от нуля. Распределение конусов (I.5), которое ассоциируется с M-распределением, обозначим $(\overset{*}{g}_M)$.

З а м е ч а н и е. Компоненты тензоров $\{g_{pq}\},\{g_{ab}\}$ имеют структуру вида (I.3), где надо соответственно положить $\sigma=p,\ \varrho=q$ или $\sigma=a,\ \varrho=b$. Тензоры $\{g_{pq}\},\{g_{ab}\},\{g_{\sigma\varrho}\}$ ассоциированы с нормалью $\mathfrak{M}\{M_n^\sigma\}$ 1-го рода Михэйлеску.

§ 2. Сети линий проективного пространства, индуцированные дополнительно реперированными Λ-распределением и M-распределением

1. При выполнении условия $r\le n-r-1$, т.е. когда Λ-распределение несет флаговую структуру [3], в каждой плоскости $\Lambda(L_0)$ можно построить r линейно независимых инвариантных одномерных направлений, определяющих r полей прямых. В качестве таких направлений можно выбрать направления $\underset{1}{k},\underset{2}{k},\dots,\underset{r-2}{k}$, сопряженные соответственно многомерным направлениям $\underset{(1)}{\Lambda},\underset{(2)}{\Lambda},\dots,\underset{(r-2)}{\Lambda}$ относительно последовательности возникающих тензоров $\{g_{pq}\},\{g_{p_1q_1}\},\dots,\{g_{p_{r-2}q_{r-2}}\}$, дополнив их одномерным направлением $\underset{r}{k}=\underset{(r-1)}{\Lambda}$ [3]. Отметим, что размерности многомерных направлений $\underset{(0)}{\Lambda},\underset{(1)}{\Lambda},\dots,\underset{(r-2)}{\Lambda},\underset{(r-1)}{\Lambda}$ определяются следующим образом: надо от размерности r Λ-распределения вычесть номер индекса (γ) соответствующего направления $\underset{(\gamma)}{\Lambda}$.

Многомерное направление $\underset{(1)}{\Lambda}$ сопряжено некоторому одномерному направлению $\underset{1}{k}$ (y_1^σ) относительно тензора $\{g_{pq}\}$ ((I.3), где $\sigma=p,\ \varrho=q$), если направление $\underset{1}{k}$ сопряжено относительно тензора $\{g_{pq}\}$ любому одномерному направлению $(y_2^\sigma)\in\underset{(1)}{\Lambda}$, т.е. если выполняются условия:

$$g_{pq}y_1^p y_2^q=0,\quad y^{\hat u}=0. \qquad (2.1)$$

Направление $\underset{1}{k}$ в плоскости $\Lambda(L_0)$, сопряженное $(r-1)$-мерному направлению $\underset{(1)}{\Lambda}$ относительно тензора $\{g_{pq}\}$ в репере $\mathcal{R}_L(H,M,\mathcal{L})$ [3] определяется системой уравнений

$$g_{p_1q_1}y^{q_1}+g_{p_1 1}y^1=0,\quad y^{\hat u}=0, \qquad (2.2)$$

где $\{g_{p_1q_1}\}$ – невырожденный тензор, присоединенный к группе допустимых преобразований репера $\mathcal{R}_L(H,M,\mathcal{L})$, определяющий в плоскости $\underset{(1)}{\Lambda}$ $(r-2)$-мерный конус $\underset{(1)}{g}$.

Систему (2.2), определяющую направление $\underset{1}{k}$, можно записать в виде

$$y^{p_1}-k_1^{p_1}y^1=0,\quad y^{\hat u}=0, \qquad (2.3)$$

где

$$k_1^{p_1}\overset{def}{=}-g^{p_1q_1}g_{q_1 1},\quad \overset{(\theta)}{\nabla}k_1^{p_1}+\theta_1^{p_1}=k_{1K}^{p_1}\omega_0^K. \qquad (2.4)$$

Дифференциальные уравнения (2.4) определяют в P_n поле одномерных линейных элементов $\underset{1}{k}$ (2.3), таких, что в каждом центре L_0 имеем: $\underset{1}{k}\subset\Lambda(L_0)$, $\underset{1}{k}\cap\underset{(1)}{\Lambda}(L_0)=L_0$. Для простоты изложения будем последовательно адаптировать репер $\mathcal{R}_L(H,M,\mathcal{L})$ плоскостям: $\underset{(1)}{\mathcal{L}},\underset{(2)}{\mathcal{L}},\dots,\underset{(\bar\mu)}{\mathcal{L}}$ $(\bar\mu=\overline{1,r-2})$. При этом на каждом шаге часть компонент $g_{p_\mu q_\mu}$ тензора $\{g_{pq}\}$ будет образовывать самостоятельный тензор относительно группы преобразований репера $\mathcal{R}_L(H,M,\underset{(1)}{\mathcal{L}},\underset{(2)}{\mathcal{L}},\dots,\underset{(\bar\mu-1)}{\mathcal{L}})$. Направление k_2 в плоскости $\underset{(1)}{\Lambda}$, сопряженное многомерному направлению $\underset{(2)}{\Lambda}$ относительно тензора $\{g_{p_1q_1}\}$ в репере $\mathcal{R}_L(H,M,\mathcal{L},\underset{(1)}{\mathcal{L}})$, определяется системой уравнений:

$$y^{p_2}-k_2^{p_2}y^2=0,\quad y^1=0,\quad y^{\hat u}=0, \qquad (2.5)$$

где

$$k_2^{p_2}\overset{def}{=}-g^{p_2q_2}g_{q_2 2},\quad \overset{(\theta)}{\nabla}k_2^{p_2}+\theta_2^{p_2}=k_{2K}^{p_2}\omega_0^K. \qquad (2.6)$$

Дифференциальные уравнения (2.6) задают поле одномерных направлений $\underset{(2)}{k}$. Невырожденный тензор $\{g_{p_2q_2}\}$ задает в $(r-2)$-плоскости $\underset{(2)}{\Lambda}(L_0)$ $(r-3)$-мерный конус $\underset{(2)}{g}$:

$$(\underset{(2)}{g}):\quad g_{p_2q_2}y^{p_2}y^{q_2}=0,\quad y^1=0,\quad y^2=0,\quad y^{\hat u}=0. \qquad (2.7)$$

Продолжая этот процесс далее, мы построим таким образом $r-1$ полей одномерных направлений, которые в текущей точке L_0 определяют $r-1$ линейно независимых инвариантных направлений $\underset{1}{k},\underset{2}{k},\dots,\underset{r-2}{k},\underset{r-1}{k}$. Вместе с полем одномерных линейных элементов $\underset{r}{k}=\underset{(r-1)}{\Lambda}$ поля $\underset{1}{k},\underset{2}{k},\dots,\underset{r-1}{k}$ одномерных линейных элементов индуцируют сеть линий [4] в Λ-распределении [3].

О п р е д е л е н и е [7], [8]. Распределение r-мерных линейных элементов Λ_r проективного пространства P_n называется дополнительно реперированным, если к данному распределени[ю] присоединены $n-r$ инвариантных полей прямых, натягивающих в каждом центре L_0 распределения H_r $(n-r)$-мерную плоскость $N^*_{n-r}(L_0)$, имеющую с соответствующей плоскостью распределени[я] Λ_r лишь одну общую точку L_0 (центр распределения Λ_r).

Учитывая результаты работ [2, § 1], [3; § 2, Ш], приходим к следующему предложению.

Т е о р е м а 1. В дифференциальной окрестности порядка $n-r+1$ при $n-r-1 \geqslant r$ дополнительно реперированное Λ-распределение индуцирует внутренним инвариантным образом три однопараметрических семейства сетей линий [4] проективного пространства, построение которых ассоциируется с любой из пар $(\mathfrak{A},\mathfrak{M}),(\mathfrak{B},\mathfrak{M}),(\mathfrak{L},\mathfrak{M})$.

Пусть $\nu(L_0)$ - произвольная инвариантная нормаль I-го рода H-распределения, внутренним образом присоединенная в дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ образующего элемента $\mathcal{H}$-распределения. Пусть, далее, $(n-2)$-мерные плоскости $\underset{\nu}{\mathfrak{A}}(L_0)$, $\underset{\nu}{\mathfrak{B}}(L_0)$, $\underset{\nu}{\mathfrak{L}}(L_0)$ являются соответственно плоскостями $\mathfrak{A}(L_0)$, $\mathfrak{B}(L_0)$, $\mathfrak{L}(L_0)$, ассоциированными с нормалью $\nu(L_0)$. Тогда имеет место [2, § 2], [3; Ш гл., § 2]

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $(n-r-1)+t$ при $n-r-1 \geqslant r$ дополнительно реперированное Λ-распределение индуцирует внутренним инвариантным образом три однопараметрических семейства сетей линий [4] проективного пространства P_n, построение которых ассоциируется с любо[й] из пар $(\nu,\underset{\nu}{\mathfrak{A}}),(\nu,\underset{\nu}{\mathfrak{B}}),(\nu,\underset{\nu}{\mathfrak{L}})$, где $\nu(L_0)$ - произвольная инвариантная нормаль 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, внутренним образ[ом] присоединенная в дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$.

2. Пусть оснащающее M-распределение несет флаговую структуру [3, Ш, § 2] при $m \leqslant n-m-1$. Тогда в каждой плоскости $M(L_0)$ можно построить m линейно независимых инвариантных одномерных направлений, определяющих m полей прямых [2, §3] В качестве таких направлений можно выбрать направления $\underset{1}{t},\underset{2}{t},\ldots,\underset{m-1}{t}$, сопряженные соответственно многомерным направлениям $\underset{(1)}{M},\underset{(2)}{M},\ldots,\underset{(m-1)}{M}$ относительно последовательности возникающих тензоров $\{g_{ae}\}$ ((I.3), где $\sigma=a$; $\rho=b$), $\{g_{a_1 b_1}\},\{g_{a_2 b_2}\},\ldots,\{g_{a_{m-2} b_{m-2}}\}$, дополнив их направлением $\underset{m}{t}=\underset{(m-1)}{M}$ [3; § 2, Ш]. Конструкция построения одномерных направлений $\underset{1}{t},\underset{2}{t},\ldots,\underset{m-1}{t}$ такая же, как и в п.I (§ 2). Таким образом, поля одномерных линейных элементов $\underset{1}{t},\underset{2}{t},\ldots,\underset{m}{t}$ образуют сеть линий [4] в M-распределении. Отсюда, с учетом результатов работ [3], [2], справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности порядка $n-m+1$ при $n-m-1\geqslant m$ дополнительно реперированное M-распределение индуцирует внутренним инвариантным образом три однопараметрических семейства сетей линий [4] проективного пространства P_n, построение которых ассоциируется с любой из пар $(\mathfrak{A},\mathfrak{M}),(\mathfrak{B},\mathfrak{M}),(\mathfrak{L},\mathfrak{M})$.

Т е о р е м а 4. В дифференциальной окрестности порядка $(n-m-1)+t$ при $n-m-1\geqslant m$ дополнительно реперированное M-распределение индуцирует внутренним инвариантным образом три однопараметрических семейства сетей линий [4] проективного пространства P_n, построение которых ассоциируется с любой из пар $(\nu,\underset{\nu}{\mathfrak{A}}),(\nu,\underset{\nu}{\mathfrak{B}}),(\nu,\underset{\nu}{\mathfrak{L}})$, где $\nu(L_0)$ - произвольная внутренняя инвариантная нормаль I-го рода $\mathcal{H}$-распределения порядка $t\geqslant 2$.

§ 3. Сеть линий Σ^*_r В.Т.Базылева

1. Пусть заданы геометрические объекты $\{\underset{1}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$ и $\{\underset{2}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$, определяющие два поля одномерных нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения, которые в репере $\mathcal{R}_L(H,M)$ определяются системами дифференциальных уравнений:

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\underset{1}{\nu}{}^{\sigma}_n+\theta^{\sigma}_n=\underset{1}{\nu}{}^{\sigma}_{nK}\,\omega^K_0\,,\qquad \overset{(\theta)}{\nabla}\underset{2}{\nu}{}^{\sigma}_n+\theta^{\sigma}_n=\underset{2}{\nu}{}^{\sigma}_{nK}\,\omega^K_0\,. \tag{3.I}$$

Характеристики текущего элемента $H(L_0)$ $\mathcal{H}$-распределения при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим соответственно распределениям одномерных нормалей $\{\underset{1}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$ и $\{\underset{2}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$, порождают внутри гиперплоскости $H(L_0)$ $(n-2)$-мерную плоскость $\vartheta_{n-2}(L_0)$, определенную центром L_0 и $(n-3)$-мерной плоскостью пересечения этих характеристик. В случае, если тензор $\{\underset{1}{\nu}{}^{\sigma}_n-\underset{2}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$ не нулевой, плоскость $\vartheta_{n-2}(L_0)$ высекает из текущей плоскости $\Lambda(L_0)$ базисного Λ-распределения $(r-1)$-мерную плоскость $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)=\Lambda(L_0)\cap\vartheta_{n-2}(L_0)$. С многомерным направлением $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)$ в плоскости $\Lambda(L_0)$ естественно ассоциируется одномерное направление $\mathcal{U}_1(L_0)$ - направление, сопряженное многомерному направлению $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)$ относительно конуса g_Λ (I.4). Каждая из одномерных нормалей $\{\underset{1}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$ и $\{\underset{2}{\nu}{}^{\sigma}_n\}$ вместе с характеристикой $\chi(L_0)$ H-

10 Зак. 1606

распределения порождает нормаль I-го рода $\tilde q\{q^p_n\}=[\nu,\chi]$ распределения Λ, которая относительно репера $R_1(H,M)$ определяется системой

$$y^p-\chi^p_u y^u-(\underset{1}{\nu}{}^p_n-\underset{1}{\nu}{}^u_n\chi^p_u)y^n=0 \qquad (3.2)$$

или аналогично системой уравнений

$$y^p-\chi^p_u y^u-(\underset{2}{\nu}{}^p_n-\underset{2}{\nu}{}^u_n\chi^p_u)y^n=0. \qquad (3.3)$$

Поля одномерных направлений $\mathcal{U}_1$ и $(r-1)$-мерных направлений $\mathcal{U}_{r-1}$ вместе с полем нормалей $\tilde q=[\nu,\chi]$ индуцируют в базисном Λ-распределении сеть линий, которую ввел В.Т.Базылев и назвал ее сетью линий Σ^*_r [5].

Для построения сети линий Σ^*_r [5] рассмотрим плоскость $\mathcal{B}_{n-r+1}=[\mathcal{U}_1(L_0),\tilde q(L_0)]$, натянутую на плоскость $\tilde q(L_0)$, и одно мерное направление $\mathcal{U}_1(L_0)$, которое можно интерпретировать как $\Lambda\mathcal{U}_{r-1}$- виртуальную нормаль I-го рода плоскости $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)$. Найдем в плоскости $\mathcal{B}_{n-r+1}(L_0)$ фокальное многообразие $\Phi_{n-r}(\mathcal{U}_{r-1}$ размерности $n-r$ порядка $r-1$, соответствующее плоскости $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)$.

Фокальному многообразию $\Phi_{n-r}(\mathcal{U}_{r-1})$ в плоскости $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)$ бу дет соответствовать многообразие фокальных направлений. Дейст вительно, прямая $\mathcal{U}_1$ пересекает фокальное многообразие $\Phi_{n-r}(\mathcal{U}_{r-1})$ в $r-1$ линейно независимых фокальных точках, которым в плоскости $\mathcal{U}_{r-1}$ соответствуют $r-1$ фокальных направлений. Поля этих $r-1$ фокальных направлений вместе с полем прямых $\mathcal{U}_1$ определяют в Λ-распределении сеть линий Σ^*_r [5] Эта сеть ассоциирована с парой заданных различных нормалей $\nu_1\{\underset{1}{\nu}{}^\sigma_n\}$ и $\nu_2\{\underset{2}{\nu}{}^\sigma_n\}$. Если нормали ν_1 и ν_2 внутренне связа ны с Λ-распределением, то и сеть линий Σ^*_r внутренне прис единена к Λ-распределению. Следовательно, имеет место

Т е о р е м а 5. С каждой парой различных внутренних и вариантных одномерных нормалей ν_1 и ν_2 $\mathcal{H}$-распределения $\{\underset{1}{\nu}{}^\sigma-\underset{2}{\nu}{}^\sigma\neq 0\}$ ассоциируется внутренним инвариантным образом Λ-распределении сеть линий Σ^*_r В.Т.Базылева.

Отметим, что с каждой нормалью I-го рода Λ-распределения ассоциируется сеть линий Σ^*_r. В.Т.Базылевым доказано [5], что все нормали I-го рода Λ-распределения, принадлежащие плоскости $\mathcal{B}_{n-r+1}=[\mathcal{U}_1,\tilde q]$, индуцируют в Λ-распределении одну и ту же сеть линий Σ^*_r. Если в качестве одномерных нормалей $\{\underset{1}{\nu}{}^\sigma_n\}$ и $\{\underset{2}{\nu}{}^\sigma_n\}$ H-распределения брать нормали пучков

$(\mathcal{P},\mathcal{Q})$, $(\mathcal{P},\mathcal{M})$, $(\mathcal{M},\mathcal{Q})$, построенных внутренним инвариантным образом в окрестности 2-го порядка, то в силу теоремы 5 следует

Т е о р е м а 6. С каждой парой различных одномерных нормалей, взятых из пучков $(\mathcal{P},\mathcal{Q})$, $(\mathcal{P},\mathcal{M})$, $(\mathcal{M},\mathcal{Q})$, в дифференциальной окрестности 2-го порядка внутренним инвариантным образом присоединяется к Λ-распределению сеть линий Σ^*_r В.Т.Базылева.

Известно [3; II, § 1], что в дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ (t – порядок внутренней инвариантной нормали $\nu(L_0)$ I-го рода $\mathcal{H}$-распределения) внутренним инвариантным образом определяются три однопараметрических пучка $(\nu,\mathcal{P}_\nu)$, $(\nu,\mathcal{Q}_\nu)$, $(\mathcal{P}_\nu,\mathcal{Q}_\nu)$ нормалей 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, ассоциированных с нормалью ν, где $\mathcal{P}_\nu$, $\mathcal{Q}_\nu$ – одномерные нормали $\mathcal{H}$-распределения, соответствующие в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази соответственно плоскостям Нордена-Тимофеева $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Отсюда непосредственно вытекает обобщение теоремы 6.

Т е о р е м а 7. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ (t – порядок внутренней инвариантной нормали ν $\mathcal{H}$-распределения) с каждой парой различных одномерных нормалей, взятых из пучков $(\nu,\mathcal{P}_\nu)$, $(\nu,\mathcal{Q}_\nu)$, $(\mathcal{P}_\nu,\mathcal{Q}_\nu)$, внутренним инвариантным образом присоединяется к Λ-распределению сеть Σ^*_r В.Т.Базылева.

2. В качестве одномерного направления $\mathcal{U}_1(L_0)\subset\Lambda(L_0)$ (см. п.I) при построении сети линий Σ^*_r В.Т.Базылева можно взять любую из канонических касательных пучков $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $(\mathcal{X},\mathcal{Z})$, $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ [3; II, § 2]. Действительно, например, каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)\subset\Lambda(L_0)$ тогда и только тогда, когда тензор $\{\mathcal{X}^u_n\}=\{\mathcal{P}^u_n-\mathcal{M}^u_n\}$ равен нулю [3; II, § 2]. Пусть $\mathcal{X}^u_n\equiv 0$. Тогда положим $\mathcal{U}_1(L_0)\overset{def}{=}\mathcal{X}(L_0)$. Далее находим $(r-1)$-мерное направление $\mathcal{U}_{r-1}(L_0)$, сопряженное направлению $\mathcal{U}_1\overset{def}{=}\mathcal{X}(L_0)$ относительно конуса g_Λ (I.4), и проводим дальнейшее построение, как и в пункте I, § 3. В качестве внутренней инвариантной нормали $\tilde q_{n-r}\overset{def}{=}[\nu,\chi]$ Λ-распределения можно взять любую из построенных в работах [2], [3], [9], [10].

Т е о р е м а 8. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ с каждой парой $(\nu,\tilde q_{n-r})$, где ν – одна из канонических касательных пучков $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$, $(\mathcal{X},\mathcal{Z})$, принадлежащая Λ-распределению, а $\tilde q_{n-r}$ – внутренняя инвариантная нормаль I-го рода Λ-распределения порядка $t\geqslant 2$, внутренним инвариантным

10*

образом присоединяется к Λ-распределению сеть линий Σ_{τ}^{*} В.Т.Базылева.

3. Укажем еще одну конструкцию построения сети линий Σ_{τ}^{*} В.Т.Базылева. Известно [1], что когда тензор $\{\mathcal{L}_p\}=\{Q_p-\Psi_p\}$ не равен тождественно нулю, то плоскость $\mathcal{L}(L_0)$ пересекается с плоскостью $\Lambda(L_0)$ по $(\tau-1)$-мерной плоскости $\underset{(1)}{\vartheta}(L_0)$, которую можно принять за плоскость $\mathcal{U}_{\tau-1}(L_0)\subset\Lambda(L_0)$ (см. п.I). Затем в плоскости $\Lambda(L_0)$ находим направление $\mathcal{U}_1$, сопряженное направлению $\mathcal{U}_{\tau-1}(L_0)\overset{def}{=}\underset{(1)}{\vartheta}(L_0)$ относительно конуса g_Λ (I.4). Далее, конструкцию построения сети линий Σ_{τ}^{*} В.Т.Базылева продолжаем, как и в пункте I (§ 3), где в качестве нормали $\widetilde{q}_{n-\tau}\overset{def}{=}N_{n-\tau}$ 1-го рода Λ-распределения можно взять любую из плоскостей $N_{n-\tau}=[\nu,\chi]$, где $\nu(L_0)$ - нормаль 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, взятая из пучков $(\nu,\Psi_\nu),(\nu,Q_\nu),(\Psi_\nu,Q_\nu)$ внутренних инвариантных нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. Очевидно, что указанную конструкцию построения сети линий Σ_{τ}^{*} В.Т.Базылева можно проводить исходя из любой плоскости пучков $(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),(\mathfrak{A},\mathcal{L}),(\mathfrak{B},\mathcal{L})$.

Т е о р е м а 9. В общем случае с каждой плоскостью ν_{n-2} пучков $(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),(\mathfrak{A},\mathcal{L}),(\mathfrak{B},\mathcal{L})$ ассоциируется в Λ-распределении сеть линий Σ_{τ}^{*} В.Т.Базылева, внутренним инвариантным образом присоединенная к Λ-распределению в дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$, где t - порядок внутренней инвариантной нормали 1-го рода $\widetilde{q}_{n-\tau}=[\nu,\chi]$ Λ-распределения.

§ 4. Сеть линий Σ_m^{*} В.Т.Базылева

1. Аналогично, следуя пунктам 1 и 2, § 3 и рассматривая построение сети линий Σ_m^{*} В.Т.Базылева в M-распределении, приходим к следующим результатам.

Т е о р е м а 10. С каждой парой различных одномерных нормалей, взятых из пучков $(\nu,\Psi_\nu),(\nu,Q_\nu),(\Psi_\nu,Q_\nu)$ в дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$, где t - порядок внутренней инвариантной одномерной нормали 1-го рода $\mathcal{H}$-распределения, внутренним инвариантным образом присоединяется к M-распределению сеть Σ_m^{*} В.Т.Базылева.

Т е о р е м а 1. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ с каждой парой $(\nu,\widetilde{q}_{n-m})$, где t - порядок внутренней инвариантной нормали $\widetilde{q}_{n-m}$ 1-го рода M-распределения, а ν - одна из канонических касательных пучков $(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}),(\mathfrak{Y},\mathfrak{Z}),(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$, принадлежащая M-распределению, внутренним инвариантным образом присоединяется к M-распределению сеть линий Σ_m^{*} В.Т. Базылева.

2. Приведем еще одну конструкцию построения сети линий Σ_m^{*} В.Т.Базылева в M-распределении. Будем исходить из задания $\mathcal{L}$-распределения [1], [3], слой которого $\mathcal{L}(L_0)$ в каждом центре L_0 сечет плоскость $M(L_0)$ по плоскости $\vartheta_{m-1}(L_0)$, т.е.

$$\vartheta_{m-1}(L_0)=\mathcal{L}(L_0)\cap M(L_0),\ L_0\in\vartheta_{m-1}(L_0).$$

В плоскости $M(L_0)$ находим одномерное направление $\vartheta_1(L_0)$, сопряженное $(m-1)$-мерному направлению $\vartheta_{m-1}(L_0)$ относительно конуса g_M (I.5). Плоскость $\widetilde{\varphi}_{n-m}(L_0)=[\vartheta_1(L_0),\Phi(L_0)]$, натянутая на одномерное инвариантное направление $\vartheta_1(L_0)$ и характеристику $\Phi(L_0)$ H-распределения в каждом центре L_0, является внутренней инвариантной нормалью I-го рода M-распределения. Поля одномерных направлений ϑ_1 и $(m-1)$-мерных плоскостей ϑ_{m-1} вместе с полем нормалей $\widetilde{\varphi}_{n-m}$ индуцируют в M-распределении сеть линий Σ_m^{*} В.Т. Базылева.

Действительно, рассмотрим плоскость $\mathfrak{Z}(L_0)$, натянутую на плоскость $\widetilde{\varphi}$ и одномерное направление ϑ_1, т.е. $\mathfrak{Z}(L_0)=[\widetilde{\varphi}(L_0),\vartheta_1(L_0)]$ - нормаль 1-го рода плоскости $\vartheta_{m-1}(L_0)$. В плоскости $\mathfrak{Z}(L_0)$ найдем фокальное многообразие, соответствующее плоскости $\vartheta_{m-1}(L_0)$, т.е. полученное при смещении центра L_0 вдоль кривых, принадлежащих ϑ_{m-1} —распределению. Искомое фокальное многообразие $Z_{n-m}(\vartheta_{m-1})$ будет многообразием размерности $(n-m)$ порядка $m-1$. Фокальному многообразию $Z_{n-m}(\vartheta_{m-1})$ в плоскости $\vartheta_{m-1}(L_0)$ соответствует многообразие фокальных направлений. Прямая $\vartheta_1(L_0)$ пересекает фокальное многообразие $Z_{n-m}(\vartheta_{m-1})$ в $m-1$ линейно независимых фокальных точках, которым в плоскости ϑ_{m-1} соответствует $m-1$ фокальных направлений. Поля этих $m-1$ фокальных направлений вместе с полем прямых ϑ_1 определяют в M-распределении сеть линий Σ_m^{*} В.Т.Базылева. Построение этой сети Σ_m^{*} В.Т. Базылева ассоциировано с $\mathcal{L}$-распределением. Очевидно, данную конструкцию построения сети Σ_m^{*} В.Т.Базылева можно ассоциировать с любой плоскостью ν_{n-2} пучков $(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),(\mathfrak{A},\mathcal{L}),(\mathfrak{B},\mathcal{L})$.

Отсюда вытекает следующая

Т е о р е м а 12. В общем случае с каждой плоскостью ν_{n-2} пучков $(\mathfrak{A},\mathfrak{B}),(\mathfrak{A},\mathcal{L}),(\mathfrak{B},\mathcal{L})$ ассоциируется построение в M-распределении сети линий Σ_m^{*} В.Т.Базылева, внутренним инваринтным образом присоединенной к M-распределению в дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$, где t – порядок внутренней инвариантной нормали I-го рода $\widetilde{q}_{n-m} = [\,\nu,\ \Phi(L_0)]$ M-распределения.

Библиографический список

1. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I. Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Деп. в ВИНИТИ 2.07.84. № 4481-84. 94 с.

2. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. Ш. Калинингр. ун-т. Калининград, 1985. Деп. в ВИНИТИ 19.02.85. № 1275-85. 38 с.

3. П о п о в Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. С.-Петербург. Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1992. 172 с.

4. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Итоги науки и техники. Геометрия. ВИНИТИ. М., 1965. Т.4. С. 138-164.

5. Б а з ы л е в В.Т. Об одном замечательном классе сетей // Проблемы геометрии. ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С. 105-116.

6. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С. 71-120.

7. О с т и а н у Н.М., Б а л а з ю к Т.Н. Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С. 75-115.

8. Б а л а з ю к Т.Н. Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. Ш. М., 1978. Деп. в ВИНИТИ 9.02.1978. № 465-78. 30 с.

9. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Деп. в ВИНИТИ 16.12.82. № 6192-82. 126 с.

10. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. П./Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Деп. в ВИНИТИ 9.01.85. 36 с.

УДК 514.75

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАВНОНАКЛОННЫЕ ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ

О.С.Р е д о з у б о в а

(Московский государственный педагогический университет)

В работе рассмотрены ортогональные пары Т конгруэнций в E_3, которые являются равнонаклонными. Найдены условия равнонаклонности ортогональных пар Т конгруэнций, а также условия, при которых у таких пар постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

С парой Т конгруэнций τ_a $(a=1,2)$ связана конгруэнция $\{\tau\}$ общих перпендикуляров. К паре конгруэнций присоединен подвижный ортонормированный репер $R=(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ так, что $\tau \parallel \vec{e}_3, O\in\tau$. Направляющие векторы прямых τ_a есть векторы

$$\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a ,$$

где α_a – углы, образуемые векторами $\vec{\eta}_a$ и $\vec{e}_1$

Относительно репера $(O,\vec{e}_3)$ точки $K_a=\tau_a\cap\tau$ имеют координаты h_a. Тогда расстояние между соответствующими прямыми пары равно $|h_1-h_2|$, а угол между ними $\alpha_1-\alpha_2$. Относительно реперов $(K_a,\vec{\eta}_a)$ фокусы F_a и F'_a прямых τ_a имеют координаты ρ_a, ρ'_a (абсциссы фокусов).

Компоненты инфинитезимальных преобразований подвижного репера R удовлетворяют условиям:

$$d\vec{O}=\omega^i\vec{e}_i\ , \quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j \quad (i,j=1,2,3).$$

В соответствии с [1, с.3] пары Т конгруэнций в общем случае, когда $\rho=\rho'_1\rho_2-\rho_1\rho'_2\neq 0$, определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\rho_2\rho'_2(\rho'_1-\rho_1)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{13} + Q_1\cdot\dfrac{\rho_2-\rho'_2}{\rho}, \\[2ex] A_2 = \dfrac{\rho_1\rho'_1(\rho_2-\rho'_2)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{23} + Q_2\cdot\dfrac{\rho_1-\rho'_1}{\rho}, \\[2ex] H_1 = \dfrac{\rho_1\rho'_1(\rho'_2-\rho_2)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{13} + Q_1\cdot\dfrac{\rho_1-\rho'_1}{\rho}, \\[2ex] H_2 = \dfrac{\rho_2\rho'_2(\rho_1-\rho'_1)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{23} + Q_2\dfrac{\rho'_2-\rho_2}{\rho} \end{cases} \qquad (1)$$