УДК 514.76

Н. А. Рязанов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Скобка Ли касательных векторов и тождества Бьянки в главном расслоении

Рассмотрено главное расслоение. Построены адаптированные пфаффовы производные векторов репера касательного пространства к расслоению в произвольной точке расслоения. Найдено выражение скобки Ли произвольных векторов из касательного пространства. Получены тождества Бьянки на компоненты объекта кривизны в произвольном главном расслоении, включающие компоненты объекта кручения аффинной связности. Описаны действия горизонтальных форм кривизны и вертикальных форм связности на вертикальных, невертикальных и горизонтальных векторах.

Ключевые слова: вертикальные и горизонтальные векторы, пфаффовы производные, скобка Ли, фундаментально-групповая связность, горизонтальные и вертикальные формы, тождества Бьянки.

Структурные уравнения расслоения $G_r(M_n)$, базой которого является n-мерное гладкое многообразие M_n, а типовым слоем r-членная группа Ли G_r, имеют вид

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{1}$$

$$D\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega_i^\alpha. \tag{2}$$

Здесь D — внешний дифференциал, $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные константы, удовлетворяющие условиям: $C_{\beta\gamma}^\alpha = -C_{\gamma\beta}^\alpha$ (антисимметрия по нижним индексам); $C^{\alpha}_{\beta\gamma}C^{\beta}_{\delta\varepsilon}+C^{\alpha}_{\beta\delta}C^{\beta}_{\varepsilon\gamma}+C^{\alpha}_{\beta\varepsilon}C^{\beta}_{\gamma\delta}=0$ (тождества Якоби). Индексы принимают следующие значения:

$$i, j, ... = \overline{1, r}\,;\ \alpha, \beta, ... = \overline{n+1, n+r}\,.$$

Выражение для дифференциала точки $A \in G_r(M_n)$ запишем в виде [2]

$$dA = \omega^i e_i + \omega^\alpha e_\alpha\,. \tag{3}$$

Совокупность векторов первого порядка $e = \{e_i, e_\alpha\}$ образует репер касательного пространства $T_{n+r} = span(e_i, e_\alpha)$ к расслоению $G_r(M_n)$ в точке A. Векторы e_α являются касательными к слою и называются вертикальными. Двойственным к реперу e служит корепер $\omega = \{\omega^i, \omega^\alpha\}$:

$$\omega^i(e_j) = \delta^i_j,\ \ \omega^i(e_\alpha) = 0,\ \ \omega^\alpha(e_i) = 0,\ \ \omega^\alpha(e_\beta) = \delta^\alpha_\beta\,.$$

Дифференцируя внешним образом выражение (3) и разрешая результат по лемме Картана, получим

$$de_i - \omega^j_i e_j - \omega^\alpha_i e_\alpha = \omega^j e_{ij} + \omega^\alpha e_{i\alpha}, \tag{4}$$

$$de_\alpha = \omega^i e_{\alpha i} + \omega^\beta (C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma + e_{\alpha\beta}). \tag{5}$$

Для совокупности векторов второго порядка $e' = \{e_{ij}, e_{i\alpha}, e_{\alpha i}, e_{\alpha\beta}\}$, называемых пфаффовыми производными векторов $e = \{e_i, e_\alpha\}$, справедливы условия симметрии

$$e_{ij} = e_{ji},\ \ e_{i\alpha} = e_{\alpha i},\ \ e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha}\,. \tag{6}$$

Перепишем уравнения (5) в виде $de_\alpha = \omega^i e_{\alpha i} + \omega^\beta \hat{e}_{\alpha\beta}$, где векторы $\hat{e}_{\alpha\beta} = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma + e_{\alpha\beta}$ названы *адаптированными пфаффовыми производными*.

Дифференцируя структурные уравнения (1), (2) и разрешая результат по обобщенной лемме Картана, находим структурные уравнения для форм $\omega^i_j, \omega^\alpha_\beta, \omega^\alpha_i$:

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk},\ D\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_{\beta i},$$
$$D\omega^\alpha_i = \omega^j_i \wedge \omega^\alpha_j + \omega^\beta_i \wedge \omega^\alpha_\beta + \omega^j \wedge \omega^\alpha_{ij}. \tag{7}$$

Дифференцируя внешним образом выражения (4) и (5) с учетом уравнений (7), получим сравнения по модулю форм ω^i, ω^α:

$$de_{ij} \equiv \omega^k{}_i e_{kj} + \omega^\alpha_i e_{\alpha j} + \omega^k{}_j e_{ik} + \omega^\alpha_j e_{i\alpha},$$
$$de_{i\beta} \equiv \omega^j{}_i e_{j\beta} + \omega^\alpha_i e_{\alpha\beta} + C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma e_{i\alpha},\ de_{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Совокупность векторов второго порядка* $e' = \{e_{ij}, e_{i\alpha}, e_{\alpha i}, e_{\alpha\beta}\}$, *принадлежащих касательному пространству* $T^2G_r(M_n)$, *удовлетворяет сравнениям (8). Инвариантными подпространствами 2-го порядка пространства* $T^2G_r(M_n)$ *являются следующие:* $H^1 = \{e_i, e_\alpha, e_{ij}, e_{i\alpha}, e_{\alpha i}\}$, $H^2 = \{e_\alpha, e_{i\alpha}, e_{\alpha\beta}\}$, $H^3 = \{e_{\alpha\beta}\}$.

Теорема 2. *Альтернации пфаффовых производных* e' *являются скобками Ли векторов* e [2].

Доказательство. Базисные и слоевые пфаффовы производные e' будем считать производными по направлению невертикальных векторов e_i и вертикальных векторов e_α, т. е.

$$e_{ij} = \partial_{e_j} e_i,\quad e_{\alpha i} = \partial_{e_i} e_\alpha,\quad e_{i\alpha} = \partial_{e_\alpha} e_i,\ \hat{e}_{\alpha\beta} = \partial_{e_\beta} e_\alpha.$$

Используя эти обозначения, с учетом условий симметрии (6) получим

$$[e_i, e_j] = \partial_{e_i} e_j - \partial_{e_j} e_i = e_{ji} - e_{ij} = 0,$$

$$[e_\alpha, e_i] = \partial_{e_\alpha} e_i - \partial_{e_i} e_\alpha = e_{i\alpha} - e_{\alpha i} = 0,$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = \partial_{e_\alpha} e_\beta - \partial_{e_\beta} e_\alpha = \hat{e}_{\beta\alpha} - \hat{e}_{\alpha\beta} - \hat{e}_{[\beta\alpha]} = 2C^\gamma_{\beta\alpha} e_\gamma .$$

Для построенных скобок

$$[e_i, e_j] = 0, \; [e_\alpha, e_i] = 0, \; [e_\alpha, e_\beta] = \hat{e}_{[\beta\alpha]} = 2C^\gamma_{\beta\alpha} e_\gamma$$

справедливы тождества Якоби в следующих возможных случаях:

$$[[e_i, e_j], e_k] + [[e_k, e_i], e_j] + [[e_j, e_k], e_i] = 0,$$

$$[[e_\alpha, e_i], e_j] + [[e_j, e_\alpha], e_i] + [[e_i, e_j], e_\alpha] = 0,$$

$$[[e_\alpha, e_\beta], e_i] + [[e_i, e_\alpha], e_\beta] + [[e_\beta, e_i], e_\alpha] = 0,$$

$$[[e_\alpha, e_\beta], e_\gamma] + [[e_\gamma, e_\alpha], e_\beta] + [[e_\beta, e_\gamma], e_\alpha] = 0 .$$

Рассматривая dA как линейное преобразование касательного пространства T_{n+r}, с помощью деривационной формулы (3) получим равенства: $dA(e_i) = e_i$, $dA(e_\alpha) = e_\alpha$.

Теорема 3. *Векторы из совокупности e' являются образами векторов репера e при отображениях de* [1].

Доказательство. Для линейных отображений

$$de : T_{n+r} \to T^2 G_r(M_n)$$

из касательного пространства T_{n+r} в касательное пространство 2-го порядка к расслоению $G_r(M_n)$ имеем

$$de_i(e_j) = e_k \underbrace{\omega^k_i(e_j)}_{0} + e_\alpha \underbrace{\omega^\alpha_i(e_j)}_{0} + e_{ik} \underbrace{\omega^k(e_j)}_{\delta^k_j} + e_{i\alpha} \underbrace{\omega^\alpha(e_j)}_{0} = e_{ij} .$$

Остальные случаи доказываются аналогично.

Таким образом, векторы из совокупности e' являются: 1) пфаффовыми производными векторов репера e; 2) производными векторов репера e по их направлениям, т. е. $e' = \partial_e e$; 3) образами векторов репера е при отображениях de, т. е. $e' = de(e)$.

Рассмотрим произвольный вектор x из касательного пространства T_{n+r}. Его разложение по базису имеет вид: $x = x^i e_i + x^\alpha e_\alpha$. Учитывая деривационные уравнения (4) и (5), дифференциал вектора x принимает вид:

$$dx = X_i \omega^i + X_\alpha \omega^\alpha,$$

где

$$\begin{aligned} X_i &= x^j e_{ji} + x^\alpha e_{\alpha i} + x^j_i e_j + x^\alpha_i e_\alpha, \\ X_\alpha &= x^i e_{i\alpha} + x^\beta e_{\beta\alpha} + x^i_\alpha e_i + x^\beta_\alpha e_\beta. \end{aligned} \tag{9}$$

— *базисные и слоевые пфаффовы производные вектора* x. Вычислим скобку Ли двух произвольных векторов из касательного пространства по следующему правилу:

$$[x, y] = dy(x) - dx(y) =$$
$$= \left(Y_i \omega^i(x) + Y_\alpha \omega^\alpha(x)\right) - \left(X_i \omega^i(y) + X_\alpha \omega^\alpha(y)\right).$$

Используя обозначения (9), получим:

$$[x, y] = \hat{x}^i e_i + \hat{x}^\alpha e_\alpha, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{x}^i &= x^j y^i_j - x^i_j y^j + x^\alpha y^i_\alpha - x^i_\alpha y^\alpha, \\ \hat{x}^\alpha &= x^i y^\alpha_i - x^\alpha_i y^i + x^\beta y^\alpha_\beta - x^\alpha_\beta y^\beta \end{aligned} \tag{11}$$

— координаты вектора $[x, y]$ в репере e.

Теорема 4. *Скобка Ли двух произвольных векторов из касательного пространства* T_{n+r} *вычисляется по формуле (10), где координаты* $\hat{x}^i$ *и* $\hat{x}^\alpha$ *имеют вид (11), причем сама скобка Ли также принадлежит пространству* T_{n+r}.

Зададим горизонтальные векторы и вертикальные формы связности следующим образом (ср. [2]):

$$\widetilde{e}_i = e_i - \Gamma_i^\alpha e_\alpha, \; \widetilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha + \Gamma_i^\alpha \omega^i .$$

Структурные уравнения для форм $\widetilde{\omega}^\alpha$ фундаментально-групповой связности можем записать следующим образом:

$$D\widetilde{\omega}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \widetilde{\omega}^\beta \wedge \widetilde{\omega}^\gamma + \Omega^\alpha, \qquad (12)$$

где $\Omega^\alpha = \frac{1}{2} R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j$ — формы кривизны,

$R_{ij}^\alpha = 2\Gamma_{[ij]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma$ — тензор кривизны.

Продолжая структурные уравнения (12) с учетом их и уравнений (1), получим $\left(\Delta R_{ij}^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma \omega^k\right) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0.$ Учитывая тензорный характер объекта кривизны R, запишем $\left(R_{ijk}^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma\right)\omega^k \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0.$ С учетом линейной независимости базисных форм имеем $R_{[ijk]}^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{[ij}^\beta \Gamma_{k]}^\gamma = 0.$

Лемма 1. *Альтернирование по трем индексам тензора, кососимметричного по двум из них, совпадает с циклированием по этим трем индексам.*

Таким образом, получили тождества для компонент тензора кривизны: $R_{\{ijk\}}^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{\{ij}^\beta \Gamma_{k\}}^\gamma = 0.$

Рассмотрим структурные уравнения фундаментально-групповой связности:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \widetilde{\omega}_j^i + \frac{1}{2} T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^j ,$$

$$D\widetilde{\omega}^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \widetilde{\omega}^\beta \wedge \widetilde{\omega}^\gamma - \frac{1}{2} R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j ,$$

где $T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$ — кручение аффинной связности Γ_{jk}^i. Продолжая эти уравнения с учетом их же самих, а также учитывая лемму 1, получаем, что справедлива

Теорема 5. В произвольном главном расслоении аналоги вторых тождеств Бьянки имеют вид

$$\nabla_{\{k}R^{\alpha}_{ij\}}+R^{\alpha}_{l\{j}T^{l}_{ki\}}=0.$$

Утверждение 1. *Горизонтальные формы кривизны* Ω^{α}*, действуя на паре горизонтальных или невертикальных векторов, дают тензор кривизны R={* R^{α}_{ij} *}.*

Выясним, каким образом горизонтальные формы кривизны действуют на различных векторах:

$$\Omega^{\alpha}(e_{\beta},e_{\gamma})=\frac{1}{2}R^{\alpha}_{kl}\omega^{k}\wedge\omega^{l}(e_{\beta},e_{\gamma})=0,$$

$$\Omega^{\alpha}(\widetilde{e}_{i},\widetilde{e}_{j})=\frac{1}{2}R^{\alpha}_{kl}\omega^{k}\wedge\omega^{l}(\widetilde{e}_{i},\widetilde{e}_{j})=R^{\alpha}_{ij},$$

$$\Omega^{\alpha}(e_{i},e_{j})=\frac{1}{2}R^{\alpha}_{kl}\omega^{k}\wedge\omega^{l}(e_{i},e_{j})=R^{\alpha}_{ij},$$

$$\Omega^{\alpha}(e_{\beta},\widetilde{e}_{j})=\frac{1}{2}R^{\alpha}_{kl}\Big(\omega^{k}(e_{\beta})\omega^{l}(\widetilde{e}_{j})-\omega^{k}(\widetilde{e}_{j})\omega^{l}(e_{\beta})\Big)=0.$$

Утверждение 2. *Вертикальные формы связности, действуя на невертикальных векторах, дают компоненты объекта связности* $\varGamma^{\alpha}_{i}$.

Действительно, $\widetilde{\omega}^{\alpha}(e_{i})=(\omega^{\alpha}+\varGamma^{\alpha}_{j}\omega^{j})(e_{i})=\varGamma^{\alpha}_{i}$.

Справедливы условия сопряженности:

$$\widetilde{\omega}^{\alpha}(e_{\beta})=(\omega^{\alpha}+\varGamma^{\alpha}_{j}\omega^{j})(e_{\beta})=\delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Кроме того,

$$\widetilde{\omega}^{\alpha}(\widetilde{e}_{i})=(\omega^{\alpha}+\varGamma^{\alpha}_{j}\omega^{j})(e_{i}-\varGamma^{\beta}_{i}e_{\beta})=\varGamma^{\alpha}_{j}-\varGamma^{\alpha}_{j}=0,$$

т. е. горизонтальные векторы аннулируют формы связности.

Список литературы

1. *Полякова К. В.* Задание аффинной связности с помощью горизонтальных векторов // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 100—112.
2. *Полякова К. В., Шевченко Ю. И.* Способ Лаптева-Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // Там же. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

N. Ryazanov

Lie bracket for tangent vectors and Bianchi identities in principal bundle

The principal bundle is considered. Adapted Pfaffian derivatives of frame vectors of the tangent space to the bundle at arbitrary point are built. Expression for Lie bracket of arbitrary vectors in the tangent space is found. Bianchi Identities for the compositions of the curvature object in an arbitrary principal bundle, including components of a torsion object affine connection are obtained. The acting horizontal curvature forms and vertical connection forms on vertical, non-vertical and horizontal vectors is described.

УДК 514.76

Д. А. Сафонов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Обобщенная аффинная связность и ее вырождение в аффинную связность

На гладком многообразии рассмотрено расслоение линейных реперов. Предложен способ задания обобщенной аффинной связности на этом расслоении. Связность задается полем объекта связности, состоящим из тензора связности и объекта