$$\bar{Q}:\ \bar{a}_{ij}\, x^i x^j = 0,\ x^0 = 0,\ x^n = 0.$$

Т е о р е м а. Если пара гиперраспределений $\{\Delta, \bar{\Delta}\}$ имеет общую соприкасающуюся гиперквадрику, то конусы асимптотических направлений, ассоциированные с текущими элементами распределений $\Delta, \bar{\Delta}$ соответственно, пересекаются в плоскости $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(A)$ по одной кривой второго порядка.

Т е о р е м а I. Необходимым и достаточным условием соответствия в проективитете Бомпьяни-Пантази, определяемом распределением Δ, нормалей I рода (AA_n) и II рода $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(A_n)$ является тождественное обращение в нуль геометрического объекта L_{in}.

Т е о р е м а II. Необходимым и достаточным условием соответствия в проективитете Бомпьяни-Пантази, определяемом распределением $\bar{\Delta}$, нормалей I рода (AA_n) и II рода $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(A_n)$ является тождественное обращение в нуль геометрического объекта $\bar{L}_{in}$.

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов.-Тр. Геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, с.29-48.

2. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов.-Тр. Геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, 71-120.

3. О с т и а н у Н.М., Рыжков В.В., Швейкин. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева.-Тр. Геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1973, т.4, с.7-70.

В.А.Е с и н

О СОПРЯЖЕННЫХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЕТЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

В предлагаемой работе рассматривается гиперсферическое изображение поверхности V_p евклидова пространства E_{p+2} с помощью единичного вектора средней нормали. Используя эту конструкцию, рассматриваются сопряженные и ортогональные сети на p-поверхностях пространства E_{p+2}.

Отнесем поверхность $V_p \subset E_{p+2}$ к реперу $R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)$, $(i,j,k,\ell = 1,\dots,p;\ \alpha,\beta = p+1, p+2)$, где орты $\vec{e}_i$ -касательные к линиям заданной сети $\Sigma_p \subset V_p$, $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис в нормальной плоскости $N_\alpha(x)$, причем $\vec{e}_{p+2}$ коллинеарен вектору средней нормали $\vec{M}$.

Продолжая дважды систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j,\quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha,$$

$$\Delta b_{ij}^\alpha = d b_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{kj}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

где b_{ijk}^α симметричны по нижним индексам.

Так как $\vec{M} \parallel \vec{e}_{p+2}$, то $\gamma^{ij} b_{ij}^{p+2} = 0$.

Дифференцируя это тождество, находим $\omega_{p+2}^{p+1} = \eta_i \omega^i$,

где $\eta_k = \dfrac{\gamma^{ij} b_{ijk}^{p+1}}{\gamma^{ij} b_{ij}^{p+2}}$.

Будем рассматривать гиперсферическое изображение $\tilde{V}_p$ поверхности V_p с помощью единичного вектора средней нормали. Имеем

$$d\vec{e}_{p+2} = \vec{a}_i \omega^i,$$

где $\vec{a}_i = -\gamma^{jk} b_{ki}^{p+2} \vec{e}_j + \eta_i \vec{e}_{p+1}$ -векторы, касательные к линиям ω^i гиперсферического изображения $\tilde{V}_p$.

Если сеть Σ_p сопряжена относительно конуса Φ^{p+2}, то для $i \neq \ell$:

$$\vec{a}_i \vec{e}_\ell = (-\gamma^{ij} b_{ii}^{p+2} \vec{e}_j + \eta_i \vec{e}_{p+1}) \vec{e}_\ell = -\gamma^{ij} \gamma_{j\ell} b_{ii}^{p+2} = -\delta_\ell^i b_{ii}^{p+2} = 0.$$

Обратно, если для $i \neq \ell$ $\vec{a}_i \vec{a}_\ell = 0$, то

$$(-\gamma^{jk} b_{ki}^{p+2} \vec{e}_j + \eta_i \vec{e}_{p+1}) \vec{e}_\ell = 0;\ -\gamma^{jk} \gamma_{j\ell} b_{ki}^{p+2} = 0;\ -\delta_\ell^k b_{ki}^{p+2} = 0;\ b_{\ell i}^{p+2} = 0,$$

т.е. сеть Σ_p сопряжена относительно конуса Φ^{p+2}.

Аналогично, рассматривая гиперсферическое изображение $\tilde{\tilde{V}}_p$ поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью единичного вектора нормали, ортогональной к средней, получим, что сеть $\Sigma_p \subset V_p$ сопряжена относительно конуса Φ^{p+1} тогда и только тогда, когда $\vec{b}_i \vec{e}_j = 0\ (i \neq j)$, где $\vec{b}_i$ - векторы, касательные к линиям ω^i гиперсферического изображения $\tilde{\tilde{V}}_p$.

Из выше изложенного вытекает следующая

Т е о р е м а 1. Сеть $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ сопряжена тогда и только тогда, когда $\vec{a}_i \perp \vec{e}_j\ (i \neq j)$, $\vec{b}_\ell \perp \vec{e}_k\ (k \neq \ell)$.

Если в качестве исходной сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ взять ортогональную сеть, то легко доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. Ортогональная сеть $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ является сетью линий кривизны относительно средней нормали тогда и только тогда, когда $\vec{a}_i \perp \vec{e}_j\ (i \neq j)$.

Т е о р е м а 3. Ортогональная сеть $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ является сетью линий кривизны тогда и только тогда, когда $\vec{a}_i \perp \vec{e}_j\ (i \neq j)$, $\vec{a}_\ell \perp \vec{e}_k\ (\ell \neq k)$.

Направим векторы $\vec{e}_i$ по касательным к линиям сети линий кривизны относительно средней нормали, тогда

$$\vec{a}_i = -b_{ii}^{p+2} \vec{e}_i + \eta_i \vec{e}_{p+1}.$$

Если $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$, то $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_p = 0$,

$$\omega_{p+2}^{p+1} = \eta_i \omega^i = 0, \quad d\vec{e}_{p+2} = \omega_{p+2}^i \vec{e}_i.$$

Значит, поле вектора средней нормали параллельно в нор-

мальной связности. Следовательно, V_p несет ортогональную сопряженную сеть [4], совпадающую с сетью линий кривизны относительно средней нормали. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. Если касательная к каждой линии сети линий кривизны относительно средней нормали в каждой точке поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ параллельна касательной к ее гиперсферическому изображению, то сеть линий кривизны относительно средней нормали сопряжена.

Т е о р е м а 5. Сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$, сопряженной относительно конуса Φ^{p+2}, соответствует ортогональная сеть на гиперсферическом изображении $\tilde{V}_p$ тогда и только тогда, когда средние нормали вдоль линий сети Σ_p описывают псевдоторсы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Псевдоторсы определяются из системы [3] $(\alpha_{ik} + \lambda g_{ik}) \omega^k = 0$, где λ являются корнями уравнения $\det \| \alpha_{ik} + \lambda g_{ik} \| = 0$, $\alpha_{ik} = \vec{a}_i \vec{e}_k$, $g_{ik} = \vec{a}_i \vec{a}_k$. Так как $\alpha_{ik} = 0\ (i \neq k)$, то средние нормали описывают псевдоторсы тогда и только тогда, когда $g_{ik} = 0\ (i \neq k)$, т.е. когда сеть линий ω^i на $\tilde{V}_p$ ортогональна.

З а м е ч а н и е. Все выше приведенные теоремы будут справедливы, если вместо средней нормали и нормали, ортогональной к средней, использовать любую другую фиксированную нормаль $(x, \vec{e}_{p+1} \cos\varphi + \vec{e}_{p+2} \sin\varphi)$, $\varphi = const$.

Направим теперь орты $\vec{e}_i$ по касательным к линиям ортогональной сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p$. Пусть P - произвольная точка на средней нормали, тогда

$$\vec{P} = \vec{x} + y \vec{e}_{p+2},$$

$$d\vec{P} = d\vec{x} + dy\, \vec{e}_{p+2} + y\, d\vec{e}_{p+2} = \omega^i \vec{e}_i + dy\, \vec{e}_{p+2} + y\, \omega_{p+2}^i +$$

$$+ y\, \omega_{p+2}^{p+1} \vec{e}_{p+2} = [\vec{e}_i (1 - y\, b_{ii}^{p+2}) + y \eta_i \vec{e}_{p+1}] \omega^i + dy\, \vec{e}_{p+2}.$$

Пусть $\vec{N} = n^i \vec{e}_i + n^{p+1} \vec{e}_{p+1}$ - нормаль к линейчатой поверхности, образованной средними нормалями. Координаты n^i, n^{p+1} найдем из условия ортогональности вектора $\vec{N}$ векторам, по которым разложен вектор $d\vec{P}$:

$$(1-y\,b_{ii}^{p+2})\,n^i + y\,n^{p+1}\,\eta_i = 0.$$

Не умаляя общности, можно положить $n^{p+1}=-1$, тогда

$$n^i = \frac{y\eta_i}{1-y\,b_{ii}^{p+2}}\,, \quad N = \frac{y\eta_i \vec{e}_i}{1-y\,b_{ii}^{p+2}} - \vec{e}_{p+1}.$$

Если $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$, то $\eta_i = 0$ и $\vec{N} \parallel \vec{e}_{p+1}$, где $\vec{e}_{p+1}$ – орт вектора нормали $(x, \vec{H})$, ортогональной к средней. Обратно, если $\vec{N} \parallel \vec{e}_{p+1}$, то $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$. В этом случае $\vec{a}_i \perp \vec{e}_{p+1}$ и асимптотические формы гиперсферического изображения $\widetilde{V}_p$ будут

$$\varphi^{p+1} = -d\vec{e}_{p+2}\, d\vec{e}_{p+1} = -b_{11}^{p+1} b_{11}^{p+2} (\omega^1)^2 - \ldots - b_{pp}^{p+1} b_{pp}^{p+2} (\omega^p)^2,$$

$$\varphi^{p+2} = -d\vec{e}_{p+2}\, d\vec{e}_{p+1} = -(b_{11}^{p+2}\omega^1)^2 - \ldots - (b_{pp}^{p+2}\omega^p)^2.$$

Асимптотические формы поверхности V_p

$$\Phi^{p+1} = b_{11}^{p+1}(\omega^1)^2 + \ldots + b_{pp}^{p+1}(\omega^p)^2,$$
$$\Phi^{p+2} = b_{11}^{p+2}(\omega^1)^2 + \cdots + b_{pp}^{p+2}(\omega^p)^2.$$

С учетом тождества $\vec{a}_i\,\vec{a}_j = 0$ заключаем: ортогональной сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ соответствует ортогональная сопряженная сеть $\widetilde{\Sigma}_p \subset \widetilde{V}_p$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 6. Для поверхности $V_p \subset E_{p+2}$, несущей ортогональную сопряженную сеть, $\vec{N} \parallel \vec{H}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}_i \parallel \vec{e}_i$.

В этом случае ортогональной сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p \subset E_{p+2}$ соответствует ортогональная сопряженная сеть $\widetilde{\Sigma}_p \subset \widetilde{V}_p$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что для линейчатых поверхностей, образованных нормалями $(x, \vec{H})$, аналогичная теорема не имеет места.

Список литературы

I. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. – Лит. матем. сб., 1966, УI, №4, с. 475–490.

2. В е р е с о в а Е.Е. О средних нормалях V_2 в E_4. – Вопросы диф. геометрии. Сб. статей, МГПИ, 1973, с. 25–50.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства. – Мат. сб., 1961, т. 55(97), №4, с. 4II–420.

4. Ч а к м а з я н А.В. К теории двойственно нормализуемых m-мерных поверхностей V_m в E_n. – ДАН СССР, т. I96, №3, 1971, с. 538–540.

С.В. К и ш т а н о в а

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathcal{K}$ квадрик с одной вырождающейся в точку фокальной поверхностью. Рассмотрены два класса конгруэнций $\mathcal{K}$, для которых установлены некоторые геометрические свойства.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{K}$ называется конгруэнция квадрик $Q \in P_3$, обладающая следующими свойствами: I/ существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i $(i,j,k = 1,2)$; 2/ существует фокальная поверхность (F), вырождающаяся в точку.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R = \{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$. Инфинитезимальные перемещения репера определяются уравнениями

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{3}$$

Вершины A_1, A_2 репера R совместим с фокальными точками квадрики Q, описывающими невырожденные поверхности S_i. Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i). Плоскость (A_1A_2F), где F – неподвижный фокус, не совпадающая с касательными