УДК 514.76

Е. Р. Шамардина[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

katerina.r2805@gmail.com

http://orcid.org/0000-0002-2542-9167

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-16

Классификация трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел

В данной работе изучен вопрос о классификации трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел с точностью до изоморфизма. Предложенная классификация основана на рассмотрении объектов, инвариантных относительно изоморфизма, а именно таких величин, как производная подалгебра и центр алгебры Ли. Приведенную классификацию отличает от других более подробное и простое изложение.

Ключевые слова: алгебры Ли, поле комплексных чисел, алгебра Гейзенберга.

Утверждение 1. Для произвольной двумерной неабелевой алгебры Ли L_2 над полем C найдется базис $\{x, y\}$ такой, что $[x, y] = x$ [2, p. 20].

Доказательство. Пусть L'_2 — производная подалгебра алгебры Ли L. Для L'_2 возможны следующие случаи:

$$\dim L'_2 = 0,\ \dim L'_2 = 1,\ \dim L'_2 = 2\ .$$

Пусть $\dim L'_2 = 0$. Тогда все структурные уравнения равны нулю, значит L — абелева. Возникло противоречие с условием, значит, $\dim L'_2 \neq 0$.

Поступила в редакцию 06.05.2020 г.

Пусть $\dim L_2' = 1$, $x \in L'_2$, а $y \notin L'_2$. Тогда

$$[x, y] \in L'_2,\ [x, y] = \lambda x,$$

где $\lambda \neq 0, \lambda \in C.$ Преобразуем

$$[x, y] = \lambda x \Leftrightarrow [x, \widetilde{y}] = x,$$

где $\widetilde{y} = \dfrac{1}{\lambda} y$.

Таким образом, если $\dim L'_2 = 1$, то найдется базис $\{x, y\}$ такой, что $[x, y] = x$.

Пусть $\dim L'_2 = 2$ и $x, y \in L'_2$, тогда $[x, y] \in L'_2$. Рассмотрим все возможные структурные уравнения от этих элементов $[x, y] = -[y, x], [x, x] = [y, y] = 0.$ Откуда следует, что $\dim L'_2 = 1$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть C — поле комплексных чисел. Существует единственная (с точностью до изоморфизма) двумерная неабелева алгебра Ли L_2 над полем C. При этом L_2 обладает базисом $\{x, y\}$ таким, что $[x, y] = x$.*

Утверждение 2 [1, с. 21]. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C, где $\dim L' = 1$, то:

1) $L' \subset Z(L)$ либо $L' \cap Z(L) = 0$;

2) если $L' \subset Z(L)$, то существует базис $\{f, g, h\}$ такой, что $[f, g] = h$, $h \in Z(L)$;

3) если $L' \cap Z(L) = 0$, то $L = L_2 \oplus C$.

Доказательство.

1. Покажем, что $\dim Z(L) = 1.$ Пусть $\{x, y, z\}$ — базис L и $x \in L'$, тогда структурные уравнения от базисных элементов примут вид

$$[x, y] = x, [x, z] = \lambda x, [y, z] = \mu x.$$

Рассмотрим произвольный элемент $u \in L$: $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Элемент $u \in Z(L)$ тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми базисными элементами алгебры Ли L, то есть $[u,x] = [u,y] = [u,z] = 0$. Рассмотрим систему этих скобок Ли:

$$[u,x] = 0,\ [u,y] = 0,\ [u,z] = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (-\beta - \lambda\gamma)x = 0,\ (\alpha - \mu\gamma)x = 0,\ (\alpha\lambda + \beta\mu)x = 0.$$

Отсюда в силу $x \neq 0$ имеем следующие уравнения:

$$-\beta - \lambda\gamma = 0,\ \alpha - \mu\gamma = 0,\ \alpha\lambda + \beta\mu = 0.$$

Примем за неизвестные α, β, γ, а за числовые коэффициенты λ и μ. Тогда матрица данной системы однородных линейных уравнений примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 0 & -\mu \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы A нечетной размерности и сама матрица имеют кососимметрический вид, то $\det A = 0$. Минор матрицы A: $M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, значит, $rank A = 2$ и система линейных уравнений будет иметь бесконечно много решений. Найдутся такие коэффициенты α, β, γ, одновременно не равные нулю, следовательно, $\dim Z(L) = 1$.

Поскольку $\dim Z(L) = 1$, то пусть $z \in Z(L) (z \neq 0)$, а $x, y \notin Z(L)$. Если $L' \subset Z(L)$ и $\dim L' = \dim Z(L)$, значит $L' = Z(L)$, тогда

$$[x,y] = \lambda z,\quad [x,z] = 0,\quad [y,z] = 0.$$

Если $L' \cap Z(L) = 0$, то имеем

$$[x,y] = \lambda x,\quad [x,z] = 0,\quad [y,z] = 0,\ \lambda \in C,\ \lambda \neq 0.$$

2. Пусть $\{f,g,h\}$ — базис L, где $h\in Z(L)$. Модифицируем этот базис. Основываясь на первом пункте, запишем структурные уравнения в виде

$$[f,g]=\lambda h,\ \ [g,h]=0,\ \ [h,f]=0\ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f,\widetilde{g}]=h,\ \ [\widetilde{g},h]=0,\ \ [h,f]=0,$$

где $\lambda\neq 0, \lambda\in C, \widetilde{g}=\dfrac{1}{\lambda}g$. В результате имеем базис $\{f,g,h\}$ такой, что $[f,g]=h, h\in Z(L)$.

3. Пусть $\{f,g,h\}$ — базис L, где $h\in Z(L),\ f\in L'$. Тогда, основываясь на первом пункте, структурные уравнения от этих базисных элементов запишем в виде

$$[f,g]=\lambda f,\quad [g,h]=0,\quad [h,f]=0,\ \ \lambda\neq 0,\lambda\in C.$$

Модифицировав этот базис, имеем

$$[f,\widetilde{g}]=f,\quad [\widetilde{g},h]=0,\quad [h,f]=0,$$

где $\widetilde{g}=\dfrac{1}{\lambda}g$.

Двумерную алгебру Ли L_2 можем представить как линейную оболочку, натянутую на векторы $\{f,g\}$. Так как $[f,g]=f$, то L_2 будет идеалом. Поле комплексных чисел C изоморфно $Z(L)$, который также является идеалом. Так как $Z(L)\cap L_2=0$, то алгебру Ли L можем представить в виде

$$L=L_2\oplus Z(L)\Leftrightarrow L=L_2\oplus C\,.$$

Теорема 2. *Пусть C — поле комплексных чисел. Существуют ровно две (с точностью до изоморфизма) трехмерные алгебры Ли L над полем C такие, что $\dim L'=1$:*

1) алгебра Гейзенберга: $L'\subset Z(L)$;

2) $L=L_2\oplus C$, причем $L'\cap Z(L)=0$.

Утверждение 3 [2, p. 22]. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C такая, что $\dim L' = 2$, то:

1) L' — абелева;

2) $ad_x|_{L'}: L' \to L'$ — изоморфизм $(\forall x \notin L')$.

Доказательство.

1. Пусть $x \notin L'$. Составим структурные уравнения базиса $\{x, y, z\}$:

$$[x, y] = \gamma y + \delta z,\ [y, z] = \alpha y + \beta z,\ [x, z] = \xi y + \varsigma z. \tag{1}$$

Для элементов базиса рассмотрим тождество Якоби

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 .$$

Подставим соответствующие разложения скобок Ли от базисных элементов и упростим $\alpha\delta z + \beta\xi y - \alpha\varsigma y - \beta\gamma z = 0$.

Сгруппируем слагаемые двумя способами:

$$\alpha(\delta z - \varsigma y) + \beta(\xi y - \gamma z) = 0, \tag{2}$$

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)z + (\beta\xi - \alpha\varsigma)y = 0. \tag{3}$$

Так как z и y линейно независимы, то для (3) справедливо

$$\beta\xi - \alpha\varsigma = 0,\ \ \alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

то есть $\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = 0$, $\det\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \varsigma & \xi \end{pmatrix} = 0$.

Составим матрицу коэффициентов системы (1):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \xi \\ \beta & \delta & \varsigma \end{pmatrix}.$$

Поскольку размерность L' равна 2, ее ранг будет равен двум. Так как два ее минора второго порядка равны нулю, то третий минор будет отличен от нуля, а именно

$$\det\begin{pmatrix} \gamma & \xi \\ \delta & \varsigma \end{pmatrix} = \gamma\varsigma - \xi\delta \neq 0 .$$

Введем новые обозначения в (2): $y' = \delta z - \varsigma y, z' = -\gamma z + \xi y$. Составим матрицу коэффициентов правой части и найдем, чему будет равен ее определитель:

$$\det\begin{pmatrix} \delta & -\varsigma \\ -\gamma & \xi \end{pmatrix} = \delta\xi - \gamma\varsigma \neq 0 .$$

Значит, y' и z' линейно независимы и в (2) коэффициенты α и β равны нулю. Тогда система (1) примет вид

$$[x, y] = \gamma y + \delta z,\ [x, z] = \xi y + \varsigma z\ ,\ [y, z] = 0. \qquad (4)$$

Так как $y, z \in L'$ и $[y, z] = 0$, то L' — абелева.

2. Пусть $\{x, y, z\}$ — базис L. В силу предыдущего пункта структурные уравнения от базисных элементов примут вид (4). Так как $[x, y] \neq 0, [x, z] \neq 0$ и $[x, y],\ [x, z] \in L'$, то $[x, y], [x, z]$ — линейно независимы, где $ad_x|_{L'}(y) = [x, y]$ и $ad_x|_{L'}(z) = [x, z]$. Значит, $ad_x|_{L'}: L' \to L'$ — изоморфизм $(\forall x \notin L')$.

Утверждение 4. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C, $\dim L' = 2$, и найдется $h \notin L'$ такой, что оператор $ad_h|_{L'}: L' \to L'$ диагонализируем, то:

1) L имеет вид L_μ для некоторого $\mu \neq 0, \mu \in C$, где L_μ — трехмерная алгебра Ли над полем C, в которой существует базис $\{u, v, w\}$ со структурными уравнениями

$$[u, v] = v, [u, w] = \mu w, [v, w] = 0;$$

2) для любого $\widetilde{x} \notin L'$ присоединенный оператор $ad_{\widetilde{x}}|_{L'}: L' \to L'$ также диагонализируем;

3) $L_\mu \cong L_\vartheta$ тогда и только тогда, когда $\mu = \vartheta$ либо $\mu = \dfrac{1}{\vartheta}$.

Доказательство.

1. Так как $\dim L = 3$ и $\dim L' = 2$, то из утверждения 3 (п. 1) следует, что L' — абелева. Пусть $\{x, y\}$ — базис L', тогда $[x, y] = 0$.

Рассмотрим присоединенный оператор $ad_h (h \notin L')$, действующий на элементы x, y. Так как по условию $ad_h |_{L'} : L' \to L'$ диагонализируемый, то

$$ad_h |_{L'} (x) = [h, x] = \alpha x + 0 \cdot y \text{ и } ad_h |_{L'} (y) = [h, y] = 0 \cdot x + \beta y .$$

Матрица присоединенного оператора ad_h является диагональной и имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ ввиду изоморфизма ad_h, доказанного в утверждении 3 (п. 2).

Рассмотрим базис $\{x, y, h\}$ алгебры Ли L и модифицируем его:

$$[x, y] = 0,\ [h, x] = \alpha x,\ [h, y] = \beta y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [x, y] = 0,\ [\widetilde{h}, x] = x,\ [\widetilde{h}, y] = \mu y,$$

где изоморфизм φ задается следующим образом

$$\varphi : x \mapsto v, y \mapsto w, \widetilde{h} = \frac{1}{\alpha} h \mapsto u,$$

где $\mu = \dfrac{\beta}{\alpha} \neq 0$. Отсюда следует, что $L \cong L_\mu$.

2. Представим $\widetilde{x} \notin L'$ в виде $\widetilde{x} = \lambda h + w$, где $\lambda \neq 0, \lambda \in C$, $h \notin L', w \in L'$. Тогда подействуем присоединенным оператором на данное равенство $ad_{\widetilde{x}} = ad_{\lambda h} + ad_w$. За счет линейности оператора имеем $ad_{\widetilde{x}} = \lambda ad_h + ad_w$. Рассмотрим его сужение по L' $ad_{\widetilde{x}} |_{L'} = \lambda ad_h |_{L'} + ad_w |_{L'}$. Так как L' — абелева и $w \in L'$, то $ad_w |_{L'} = 0$, исходя из чего перепишем предыдущее равенство следующим образом: $ad_{\widetilde{x}} |_{L'} = \lambda ad_h |_{L'}$.

Так как оператор $ad_{\tilde{x}}|_{L'}$ является по условию диагонализируемым, то $ad_h|_{L'}$ также будет диагонализируемым и они оба будут задаваться диагональными матрицами, собственные значения которых отличаются друг от друга лишь на коэффициент λ.

3. *Необходимость.* Пусть $L_\mu \cong L_\vartheta$. Покажем, что $\mu = \vartheta$ либо $\mu = \dfrac{1}{\vartheta}$, $\mu \neq 0, \vartheta \neq 0$.

Рассмотрим L_μ и L_ϑ. Пусть $\{x, y, z\}$ — базис L_μ. Тогда структурные уравнения от базисных элементов примут вид $[x, y] = y$, $[x, z] = \mu z$, $[y, z] = 0$. Аналогично и для L_ϑ. Пусть $\{u, v, w\}$ — базис L_ϑ, тогда $[u, v] = v$, $[u, w] = \vartheta w$, $[v, w] = 0$.

Рассмотрим производные подалгебры L'_μ, L'_ϑ.

Пусть $x \notin L'_\mu, y, z \in L'_\mu$, тогда, опираясь на предыдущий пункт, мы можем утверждать, что существует присоединенный оператор $ad_x : L'_\mu \to L'_\mu$, причем он является диагонализируемым и задается диагональной матрицей $diag(1, \mu)$ с собственными значениями $1, \mu$.

Пусть $u \notin L'_\vartheta$ и $v, w \in L'_\vartheta$, тогда существует присоединенный оператор $ad_u : L'_\vartheta \to L'_\vartheta$, являющийся диагонализируемым и задаваемый диагональной матрицей $diag(1, \vartheta)$ с собственными значениями $1, \vartheta$.

Так как $L_\mu = L_\vartheta$, то существует изоморфизм $\varphi : L'_\mu \to L'_\vartheta$, $x \mapsto \varphi(x)$. Запишем u в виде $u = \lambda\varphi(x) + s$, где $\varphi(x) \notin L'_\vartheta$, $s \in L'_\vartheta, \lambda \in C.$ Тогда рассмотрим действие присоединенного оператора на это равенство $ad_u = \lambda ad(\varphi(x)) + ad_s$ и сузим его на L'_ϑ : $ad_u|_{L'_\vartheta} = \lambda ad(\varphi(x))|_{L'_\vartheta} + ad_s|_{L'_\vartheta}$. Так как L'_ϑ — абелева и- $s \in L'_\vartheta$, то $ad_s|_{L'_\vartheta} = 0$ и получим следующее равенство:

$ad_u|_{L'_\vartheta} = \lambda ad(\varphi(x))|_{L'_\vartheta}$. Так как $ad_u|_{L'_\vartheta}$ диагонализируемый оператор, то и $ad(\varphi(x))|_{L'_\vartheta}$ также диагонализируем. Тогда, исходя из доказанного выше, их собственные значения отличаются лишь на λ, откуда имеем $\vartheta = \mu$ либо $\mu = \frac{1}{\vartheta}$.

Достаточность. Пусть $\mu = \vartheta$ либо $\mu = \frac{1}{\vartheta}$. Покажем, что $L_\mu \cong L_\vartheta$. В случае когда $\vartheta = \mu,$ изоморфизм очевиден.

Рассмотрим второй случай, когда $\frac{1}{\vartheta} = \mu$. Запишем для каждой из алгебр их систему структурных уравнений от базисных элементов.

$$L_\mu : [x,y] = y,\ [x,z] = \mu z,\ [y,z] = 0;$$

$$L_\vartheta : [u,v] = v,\ [u,w] = \vartheta w,\ [v,w] = 0.$$

Преобразуем первую систему структурных уравнений:

$$[x,y] = y,\ [x,z] = \mu z,\ [y,z] = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [\widetilde{x},y] = \vartheta y,\ [\widetilde{x},z] = z,\ [y,z] = 0.$$

Отсюда имеем, что $L_\mu \cong L_\vartheta$, где φ — искомый изоморфизм $\varphi : \vartheta x = \widetilde{x} \mapsto u, y \mapsto w, z \mapsto v.$

Утверждение 5. Если L — трехмерная алгебра Ли над полем C, $\dim L' = 2$, и оператор $ad_x : L' \to L'$ не диагонализируем ни для какого $x \notin L'$, то найдется такой $x \notin L'$, что ad_x задается матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Так как оператор $ad_x : L' \to L'$ не диагонализируем ни для какого элемента $x \notin L'$, значит, и матрица оператора не приводится к диагональному виду. Следовательно, ее собственные значения равны друг другу и жорданова нормальная форма этой матрицы имеет вид [1, с. 264] $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$. Нужно показать, что ad_x можно задать матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть что существует изоморфизм φ:

$$[x,y]=\lambda y,\ [x,z]=y+\lambda z,\ [y,z]=0 \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} [\bar{x},\bar{y}]=\bar{y},\ [\bar{x},\bar{z}]=\bar{y}+\bar{z},\ [\bar{y},\bar{z}]=0.$$

Модифицируем исходную систему структурных уравнений:

$$[x,y]=\lambda y,\ [x,z]=y+\lambda z,\ [y,z]=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [\tilde{x},y]=y,\ [\tilde{x},\tilde{z}]=y+\tilde{z},\ [y,\tilde{z}]=0.$$

Получили искомый изоморфизм φ:

$$\varphi : \frac{1}{\lambda}x=\tilde{x}\mapsto \bar{x},\ \ y\mapsto \bar{y}, \lambda z=\tilde{z}\mapsto \bar{z}.$$

Теорема 3. *Существует бесконечно много (с точностью до изоморфизма) трехмерных комплексных алгебр Ли* L *над полем комплексных чисел таких, что* $\dim L' = 2$*:*

1) алгебра Ли вида L_μ*, где* $\mu \in C, |\mu| \geq 1$*;*

2) алгебра Ли, описанная в утверждении 5.

Утверждение 6 [1, с. 24]. *Если* L *— трехмерная комплексная алгебра Ли и* $L = L'$*, то:*

1) для любого ненулевого элемента $x \in L$ *ранг оператора* $ad_x : L \to L$ *равен двум;*

2) существует $h \in L$ *такой, что* ad_h *обладает ненулевым собственным значением;*

3) собственные значения оператора ad_h *имеют вид* $\alpha, 0, -\alpha$*, где* $\alpha \neq 0$*;*

4) элемент h *можно дополнить до базиса* $\{h, x, y\}$ *алгебры* L *такого, что* $[h, x] = \alpha x, [h, y] = -\alpha y, [x, y] = h$;

5) $L \cong sl(2, C)$.

Доказательство.

1. Так как $x \neq 0$, можем дополнить его до базиса пространства L': $\{x, y, z\}$. Так как $L = L'$, то $Span\{[x, y],[y, z],[z, x]\}$. Найдем образ оператора ad_x: $\mathrm{Im}(ad_x) = Span\{[x, y],[z, x]\}$. Так как $[x, y], [y, z], [z, x]$ — линейно независимая система, то и ее подсистема $[x, y],[z, x]$ будет также линейно независимой. Отсюда имеем, что $\dim(\mathrm{Im}(ad_x)) = 2$, тогда и $rank(ad_x) = 2$.

2. Если для $x \in L$ оператор ad_x обладает ненулевым собственным значением, то положим $h = x$. Пусть для $x \neq 0$ оператор ad_x имеет лишь нулевые собственные значения.

Тогда жорданова форма его матрицы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\{x, y, z\}$ — соответствующий базис L. Тогда положим $h = y$.

3. $h \in L = L'$. Из предыдущего пункта известно, что $tr(ad_h) = 0$ и что хотя бы одно из собственных значений отлично от нуля. Пусть нам даны собственные значения $0, \alpha, \beta$, одно из которых отлично от нуля. Так как $tr(ad_h) = 0$, то $0 + \alpha + \beta = 0$, то есть $\alpha = -\beta \neq 0$. Значит, оператор ad_h имеет следующие собственные значения: $\{0, \alpha, -\alpha\}$.

4. Пусть x, z — собственные элементы оператора ad_h, отвечающие собственным значениям α и $-\alpha$ соответственно. Тогда в силу тождества Якоби $ad_h([x, z]) = [h,[x, z]] = 0$, откуда имеем $[x, z] = \lambda h, \lambda \neq 0.$ Полагая $y = \lambda^{-1} z$, получаем искомый базис.

5. Пусть дан базис

$$\{x,y,z\}\in L:\ [h,x]=\alpha x,\quad [h,y]=-\alpha y,\ [x,y]=h$$

и базис

$$\{f,g,e\}\in sl(2,C):\ [e,f]=g,[e,g]=-2e,\ [f,g]=2f.$$

Установим изоморфизм между L и $sl(2, C)$:

$$[h,x]=\alpha x,\ [h,y]=-\alpha y,\ [x,y]=h\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ [\widetilde{h},x]=2x,\ [\widetilde{h},\widetilde{y}]=-2\widetilde{y},\ [x,\widetilde{y}]=\widetilde{h}.$$

Таким образом, задан изоморфизм

$$\varphi:\frac{2}{\lambda}h=\widetilde{h}\to g,\quad \frac{2}{\lambda}y=\widetilde{y}\to e, x\to f\ .$$

Значит, $L\cong sl(2,C)$.

Теорема 4. *Каждая трехмерная комплексная алгебра Ли L такая, что $L=L'$, изоморфна $sl(2,C)$.*

На основе рассмотренных объектов, инвариантных относительно изоморфизма, представим классификацию трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел в виде следующей таблицы.

Классификация трехмерных алгебр Ли над полем комплексных чисел

Класс над C	$\dim L'$	Признаки класса
1	0	Абелева алгебра Ли
2	1	$L'=Z$ алгебра Гейзенберга
3	1	$L'\cap Z=0, L=L_2\oplus C$
4	2	Диагонализируемый оператор ad_h, L_μ, где $\mu\in C, \lvert\mu\rvert\geq 1$
5	2	Оператор ad_h не диагонализируемый
6	3	$L=L'$

Список литературы

1. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М., 2013.
2. *Erdmann K., Wildon J.* Introduction to Lie Algebras. L., 2006.

E. R. Shamardina[1]

[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
katerina.r2805@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-16

The classification of three-dimensional Lie algebras on complex field

Submitted on May 6, 2020

In this paper, we study the classification of three-dimensional Lie algebras over a field of complex numbers up to isomorphism. The proposed classification is based on the consideration of objects invariant with respect to isomorphism, namely such quantities as the derivative of a subalgebra and the center of a Lie algebra. The above classification is distinguished from others by a more detailed and simple presentation.

Any two abelian Lie algebras of the same dimension over the same field are isomorphic, so we understand them completely, and from now on we shall only consider non-abelian Lie algebras. Six classes of three-dimensional Lie algebras not isomorphic to each other over a field of complex numbers are presented. In each of the classes, its properties are described, as well as structural equations defining each of the Lie algebras. One of the reasons for considering these low dimensional Lie algebras that they often occur as subalgebras of large Lie algebras

Keywords: Lie algebras, complex field, Heisenberg algebra.

References

1. *Vinberg, E. B.:* A course in algebra. Moscow (2013).
2. *Erdmann, K., Wildon, J.:* Introduction to Lie Algebras. London (2006).