УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ

Рассмотрена проективная структура Лаптева 1-го порядка, которая представлена как расслоение специальных линейных кореперов с многомерным приклеиванием. В этом расслоении задана линейная связность Лаптева с помощью объекта, содержащего тензор. Обращение тензора в нуль приводит к предпроективной связности, из которой выделена каноническая связность. При выполнении условия проективности получается проективная связность Картана и ее канонический вариант.

С другой стороны, проективная структура представлена в виде главного расслоения специальных центролинейных кореперов. Задание фундаментально-групповой связности в этом расслоении производится с помощью объекта центролинейной связности, не совпадающего с предыдущими объектами связностей.

The Laptev projective structure of the 1st order presented a fibering of special linear coframes with multidimensional gluing is considered. The Laptev linear connection by means of the object containing a tensor is set in this fibering. If the tensor vanishes we have preprojective connection from which canonical connection is marked out. The Cartan projective connection and its canonical version are obtained from a projectivity condition.

On the other hand, the projective structure is presented in the form of the principal fiber bundle of the special center-linear coframes. The giving fundamental-group connection in this fibering is made by means of the center-linear connection object, not coinciding with the previous objects of connections.

Ключевые слова: проективная структура Лаптева, многомерное приклеивание, проективная связность Картана, центролинейная связность.

Key words: the Laptev projective structure, multidimensional gluing, the Cartan projective connection, center-linear connection.

1. Расслоения кореперов над гладким многообразием

Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M_n. Г. Ф. Лаптев [1] показал, что в окрестности текущей точки A многообразия M_n можно ввести n линейно независимых дифференциальных форм Пфаффа ω^i ($i, j, k, ... = \overline{1, n}$), причем первые интегралы u^i вполне интегрируемой системы уравнений $\omega^i = 0$ являются локальными координатами точки $A(u^i) \in M_n$. Условие полной интегрируемости имеет вид:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j. \qquad (1)$$

Дифференцируя эту систему внешним образом и разрешая по лемме Лаптева [1], получим:

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{2}$$

$$\omega^i_{jk} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \Leftrightarrow \omega^i_{[jk]} \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^i_{[jk]} = \lambda^i_{jkl}\omega^l,\ \lambda^i_{(jk)l} = 0,\ \lambda^i_{[jkl]} = 0 \Rightarrow \lambda^i_{\{jkl\}} = 0, \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, круглые — симметрирование, а фигурные — циклирование.

Утверждение 1. *Над многообразием M_n имеется главное расслоение касательных линейных кореперов $L_{n^2}(M_n)$ со структурными уравнениями (1), (2), типовым слоем которого является дифференциальная группа 1-го порядка $D^1_n = GL(n) = L_{n^2}$, действующая в касательном пространстве T_n к многообразию M_n в точке A.*

В общем случае, когда

$$\lambda^i_{jkl} \neq 0 \Leftrightarrow \omega^i_{[jk]} \neq 0,$$

будем говорить (см. [2; 3]) о многообразии ${}^1M_n$ с неголономностью 1-го порядка. В особом случае $\lambda^i_{jkl} = 0 \Leftrightarrow \omega^i_{[jk]} = 0$ имеем многообразие M^1_n с голономностью 1-го порядка.

Продолжая структурные уравнения (2), найдем

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}, \tag{4}$$

$$\omega^i_{j[kl]} = \lambda^i_{jklm}\omega^m,\ \lambda^i_{j(kl)m} = 0,\ \lambda^i_{j[klm]} = 0 \Rightarrow \lambda^i_{j\{klm\}} = 0.$$

При фиксации точки *A* уравнения (2), (4) дают

$$d\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k,\ d\pi^i_{jk} = \pi^l_{jk} \wedge \pi^i_l - \pi^i_{lk} \wedge \pi^l_j - \pi^i_{jl} \wedge \pi^l_k\ \ (\pi = \omega|_{\omega^i=0}).$$

Это структурные уравнения дифференциальной группы 2-го порядка D^2_n [1], причем, согласно условиям (3_1), $\pi^i_{[jk]} = 0$. Следовательно, вне зависимости от голономности либо неголономности многообразия M_n имеем: $\dim D^2_n = \frac{1}{2}n^2(n+3)$. Группу D^2_n, имеющую факторгруппу D^1_n, можно обозначить иначе: $D^2_n = GL^2(n) = L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}$.

Утверждение 2. *Над многообразием M_n имеется главное расслоение касательных кореперов 2-го порядка $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}(M_n)$ со структурными уравнениями (1), (2), (4), типовой слой которого – дифференциальная группа 2-го порядка $L_{\frac{1}{2}n^2(n+3)}$, действующая в соприкасающемся пространстве*

$$T^2 = T_{\frac{1}{2}n(n+3)} \supset T_n = T^1.$$

Расслоение линейных кореперов 1-го порядка $L_{n^2}(M_n)$ является факторрасслоением расслоения кореперов 2-го порядка.

Аналогично многообразиям ${}^1M_n$ и M_n^1 определяются многообразия с неголономностью и голономностью 2-го и более высоких порядков. Г. Ф. Лаптев исследовал голономные гладкие многообразия высших порядков [1; 3].

2. Расслоение проективной структуры

Известно [1], что над голономным многообразием M_n возникает последовательность расслоений проективной структуры. Рассмотрим расслоение проективной структуры 1-го порядка, описываемое формами

$$\theta_0^i = \omega^i,\ \theta_0^0 = -\frac{1}{n+1}\omega_i^i,\ \theta_j^i = \omega_j^i + \delta_j^i\theta_0^0,\ \theta_j^0 = -\frac{1}{n+1}\omega_{ij}^i. \quad (5)$$

Эти формы связаны условием проективности

$$\theta_I^I = 0\ \ (I, \ldots = \overline{0, n}). \quad (6)$$

Структурные уравнения (1), (2), (4) позволяют найти внешние дифференциалы форм (5):

$$d\theta_0^i = \theta_0^J \wedge \theta_J^i,\ d\theta_0^0 = \theta_0^j \wedge \theta_j^0, \quad (7)$$

$$d\theta_j^i = \theta_j^K \wedge \theta_K^i + \theta_0^k \wedge \theta_{jk}^i,\ d\theta_j^0 = \theta_j^K \wedge \theta_K^0 + \theta_0^k \wedge \theta_{jk}^0;$$

$$\theta_{jk}^i = \omega_{jk}^i + \delta_j^i\theta_k^o + \delta_k^i\theta_j^o,\ \theta_{jk}^0 = -\frac{1}{n+1}\omega_{ijk}^i. \quad (8)$$

Структурные уравнения (7) можно объединить:

$$d\theta_J^I = \theta_J^K \wedge \theta_K^I + \theta_0^k \wedge \theta_{Jk}^I,\ \theta_{0k}^I = 0. \quad (9)$$

При $\theta^k \wedge \theta_{jk}^I = 0$ уравнения (9_1) принимают вид

$$d\theta_J^I = \theta_J^K \wedge \theta_K^I. \quad (10)$$

Эти уравнения с условием (6) являются структурными уравнениями специальной линейной группы SGL($n+1$), эффективно действующей в n-мерном проективном пространстве P_n. Уравнения (10), (6) дали возможность Э. Картану [4] ввести пространство проективной связности $P_{n,n}$, а более общие уравнения (9_1) позволили Г. Ф. Лаптеву [1] дать обобщение пространства проективной связности (без условия проективности) над гладким многообразием.

Уравнения (1), (9_1) при условиях (5_1), (6) выглядят как структурные уравнения расслоения специальных линейных кореперов $S_{n(n+2)}(M_n)$ над многообразием M_n с типовым слоем — специальной линейной группой $S_{n(n+2)} = \mathrm{SGL}(n+1)$. Но это не так, поскольку базисные формы $\omega^i = \theta_0^i$ входят в состав форм θ_J^I, поэтому они называются базисно-слоевыми.

Это обстоятельство отразим в обозначении $S_{n(n+1)+\bar{n}}(M_n)$, где черта устраняет из размерности группы $S_{n(n+2)}$ число n — количество базисно-слоевых форм θ_0^i.

Назовем расслоение $S_{n(n+1)+\bar{n}}(M_n)$ *расслоением специальных линейных кореперов* с n-мерным приклеиванием (см. [5]), короче, *n-приклеенным расслоением*.

3. Линейная связность Лаптева

Г. Ф. Лаптев [1] распространил способ задания связности в главном расслоении $S_{n(n+2)}(M_n)$ на расслоение с n-приклеиванием $S_{n(n+1)+\bar{n}}(M_n)$. Действительно преобразуем формы θ_J^I с помощью линейных комбинаций базисно-слоевых форм θ_0^k:

$$\tilde{\theta}_J^I = \theta_J^I - \Pi_{Jk}^I \theta_0^k, \tag{11}$$

причем для функций Π_{Jk}^I будут найдены дифференциальные уравнения. Возьмем внешние дифференциалы этих форм, используя структурные уравнения (1), (9_1):

$$d\tilde{\theta}_J^I = \theta_J^K \wedge \theta_K^I + \theta_0^k \wedge (d\Pi_{Jk}^I - \Pi_{Jl}^I \omega_k^l + \theta_{Jk}^I). \tag{12}$$

Преобразуем внешние произведения форм θ_J^I, подставляя их выражения из обозначений (11):

$$\theta_J^K \wedge \theta_K^I = \tilde{\theta}_J^K \wedge \tilde{\theta}_K^I + \Pi_{Jk}^K \theta_0^k \wedge \tilde{\theta}_K^I + \tilde{\theta}_J^K \wedge \Pi_{Kl}^I \theta_0^l + \Pi_{Jk}^K \theta_0^k \wedge \Pi_{Kl}^I \theta_0^l.$$

Во втором и третьем слагаемых вернемся к исходным формам:

$$\theta_J^K \wedge \theta_K^I = \tilde{\theta}_J^K \wedge \tilde{\theta}_K^I + \Pi_{Jk}^K \theta_0^k \wedge \theta_K^I + \theta_J^K \wedge \Pi_{Kl}^I \theta_0^l - \Pi_{Jk}^K \theta_0^k \wedge \Pi_{Kl}^I \theta_0^l.$$

Подставим эти выражения в уравнения (12):

$$d\tilde{\theta}_J^I = \tilde{\theta}_J^K \wedge \tilde{\theta}_K^I + \theta_0^k \wedge (\Delta\Pi_{Jk}^I + \theta_{Jk}^I) - \Pi_{Jk}^K \Pi_{Kl}^I \theta_0^k \wedge \theta_0^l, \tag{13}$$

$$\Delta\Pi_{Jk}^I = d\Pi_{Jk}^I + \Pi_{Jk}^K \theta_K^I - \Pi_{Kk}^I \theta_J^K - \Pi_{Jl}^I \omega_k^l.$$

Зададим поле объекта линейной связности Лаптева Π_{Jk}^I:

$$\Delta\Pi_{Jk}^I + \theta_{Jk}^I = \Pi_{Jkl}^I \theta_0^l. \tag{14}$$

Подставим эти дифференциальные уравнения в структурные (13):

$$d\tilde{\theta}_J^I = \tilde{\theta}_J^K \wedge \tilde{\theta}_K^I + R_{Jkl}^I \theta_0^k \wedge \theta_0^l, \tag{15}$$

где компоненты объекта кривизны-кручения линейной связности имеют вид:

$$R_{Jkl}^I = \Pi_{J[kl]}^I - \Pi_{J[k}^K \Pi_{|K|l]}^I. \tag{16}$$

Теорема 1. *Линейная связность Лаптева в n-приклеенном главном расслоении линейных кореперов* $S_{n(n+1)+\bar{n}}(M_n)$ *задается полем объекта связности* Π^I_{Jk}, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (14) и определяют формы связности (11) со структурными уравнениями (15), причем входящие в них компоненты объекта кривизны-кручения* R^I_{Jkl} *выражаются по формуле (16) через компоненты* Π^I_{Jk} *и их пфаффовы производные* Π^I_{Jkl}.

4. Предпроективная связность

Запишем подробно преобразование (11):

$$\tilde{\theta}^i_j = \theta^i_j - \Pi^i_{jk}\theta^k_0,\ \tilde{\theta}^0_0 = \theta^0_0 - \Pi^0_{0i}\theta^i_0,\ \tilde{\theta}^0_i = \theta^0_i - \Pi^0_{ij}\theta^j_0,\ \tilde{\theta}^i_0 = \theta^i_0 - \Pi^i_{0j}\theta^j_0. \qquad (17)$$

В дифференциальных уравнениях (14) раскроем действие оператора Δ, разобьем на четыре подсистемы, учтем равенства (9_2) и используем сокращенные записи:

$$\Delta\Pi^i_{j\underline{k}} - \Pi^i_{0k}\theta^0_j + \theta^i_{jk} \cong 0,\ \Delta\Pi^0_{0\underline{i}} + \Pi^j_{0i}\theta^0_j \cong 0, \qquad (18)$$

$$\Delta\Pi^0_{i\underline{j}} + \Pi^0_{ij}\theta^0_0 + \Pi^k_{ij}\theta^0_k - \Pi^0_{0j}\theta^0_i + \theta^0_{ij} \cong 0,\ \Delta\Pi^i_{0\underline{j}} - \Pi^i_{0j}\theta^0_0 \cong 0,$$

где, например, $\Delta\Pi^0_{i\underline{j}} = d\Pi^0_{ij} - \Pi^0_{kj}\theta^k_i - \Pi^0_{ik}\omega^k_j$, а символ ≅ обозначает дифференциальное сравнение по модулю базисно-слоевых форм θ^i_0.

Утверждение 3. *Объект линейной связности Лаптева* Π^I_{Jk} *содержит тензор* Π^i_{0j}.

Следовательно, инвариантны равенства такие:

$$\Pi^i_{0j} = 0. \qquad (19)$$

В этом случае базисно-слоевые формы не преобразуются, так как формула (17_4) дает

$$\tilde{\theta}^i_0 = \theta^i_0. \qquad (20)$$

Подставляя (19) в дифференциальные сравнения (18), получим сравнения для компонент усеченного объекта $\overline{\Pi} = \{\overline{\Pi}^i_{jk}, \overline{\Pi}^0_{ij}, \overline{\Pi}^0_{0i}\} = \{\Pi^I_{Jk}\}_{(19)}$:

$$\Delta\overline{\Pi}^i_{j\underline{k}} + \theta^i_{jk} \cong 0,\ \Delta\overline{\Pi}^0_{i\underline{j}} + \overline{\Pi}^0_{ij}\theta^0_0 + \overline{\Pi}^k_{ij}\theta^0_k - \overline{\Pi}^0_{0j}\theta^0_i + \theta^0_{ij} \cong 0,\ \Delta\overline{\Pi}^0_{0\underline{i}} \cong 0. \qquad (21)$$

Связность, определяемую таким объектом $\overline{\Pi}$, назовем *предпроективной связностью*. Подставим формы (20) в структурные уравнения (15):

$$d\tilde{\theta}^I_J = \tilde{\theta}^K_J \wedge \tilde{\theta}^I_K + \overline{R}^I_{Jkl}\tilde{\theta}^k_0 \wedge \tilde{\theta}^l_0 \quad \left(\overline{R}^I_{Jkl} = R^I_{Jkl}\Big|_{(19)}\right). \qquad (22)$$

Учитывая условие проективности (6), найдем сумму диагональных форм предпроективной связности из равенств ($17_{1,2}$):

$$\tilde{\theta}^I_I = N_k\theta^k_0,\ N_k = -\overline{\Pi}^0_{0k} - \overline{\Pi}^i_{ik}. \qquad (23)$$

Значит, в общем случае справедлива

Теорема 2. *Предпроективная связность, являющаяся особым случаем линейной связности Лаптева, задается полем объекта* $\overline{\Pi}$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (21), а формы связности подчиняются структурным уравнениям (22), в которые входят компоненты объекта кривизны-кручения* $\overline{R}^I_{Jkl}$, *но условие проективности не выполняется:* $\widetilde{\theta}^I_I \neq 0$.

Утверждение 4. *Объект предпроективной связности* $\overline{\Pi}$ *содержит* $\overline{\Pi}^0_{0i}$.

Значит, инвариантны равенства

$$\overline{\Pi}^0_{0i} = 0 . \tag{24}$$

Подставляя их в дифференциальные сравнения (21_2), получим сравнения для компонент $\overline{\overline{\Pi}}{}^0_{ij}$ объекта $\overline{\overline{\Pi}} = \overline{\Pi}\big|_{(24)} = \{\overline{\overline{\Pi}}{}^i_{jk}, \overline{\overline{\Pi}}{}^0_{ij}\}$:

$$\Delta\overline{\overline{\Pi}}{}^0_{i\underline{j}} + \overline{\overline{\Pi}}{}^0_{ij}\theta^0_0 + \overline{\overline{\Pi}}{}^k_{ij}\theta^0_k + \theta^0_{ij} \cong 0 . \tag{25}$$

Утверждение 5. *Каноническая предпроективная связность задается полем объекта* $\overline{\overline{\Pi}}$, *компоненты которого удовлетворяют сравнениям (21_1), (25).*

5. Проективная связность Картана

Дифференциальные сравнения ($21_{1,3}$) позволяют получить сравнения для компонент объекта N_k (23_2):

$$\Delta N_k - \theta^i_{ik} \cong 0 . \tag{26}$$

Обозначения (8_1), (5_4) дают $\theta^i_{ik} = \omega^i_{ik} + (n+1)\theta^0_k = 0$, поэтому сравнения (26) принимают тензорный вид $\Delta N_k \cong 0$.

Назовем N_k *тензором непроективности предпроективной связности*, поскольку равенства (23) обеспечивают эквивалентности

$$\widetilde{\theta}^I_I = 0 \;\Leftrightarrow\; N_k = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\Pi}^0_{0k} = -\overline{\Pi}^i_{ik} . \tag{27}$$

Теорема 3. *Проективная связность Картана как особый случай предпроективной связности задается полем объекта* $\widehat{\Pi} = \overline{\Pi}\big|_{(27_3)}$.

Подставляя равенства (24) в условия (27_3), получим

$$\overline{\Pi}^i_{ik} = 0. \tag{28}$$

Теорема 4. *Каноническая проективная связность, являющаяся нормальной связностью Картана [4], задается полем объекта* $\overset{0}{\Pi} = \overline{\overline{\Pi}}\big|_{(28)}$.

6. Центролинейная связность

Представим структурные уравнения (7):

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j ,\; d\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge \vartheta^i_{jk} , \tag{29}$$

$$d\theta^0_i = \theta^k_i \wedge \theta^0_k + \theta^0_i \wedge \theta^0_0 + \omega^j \wedge \theta^0_{ij} ,\; d\theta^0_0 = \omega^i \wedge \theta^0_i ;\; \vartheta^i_{jk} = \theta^i_{jk} - \delta^i_k\theta^0_j = \omega^i_{jk} + \delta^i_j\theta^0_k .$$

При $\omega^i = 0$ уравнения ($29_{2\text{-}4}$) принимают вид

$$d\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k,\ d\pi^0_i = \pi^0_i \wedge \pi^0_0 + \pi^j_i \wedge \pi^0_j,\ d\pi^0_0 = 0\ \ (\pi = \theta|_{\omega^i=0}),$$

причем из условия проективности (6) следует $\pi^0_0 = -\pi^i_i$. Получили структурные уравнения группы Ли, называемой *проективно-дифференциальной* [1] *группой 1-го порядка* PD^1_n, или *специальной центролинейной группой* $C_{n(n+1)}$ [6].

Утверждение 6. *Над многообразием M_n имеется главное расслоение специальных центролинейных корепеов $C_{n(n+1)}(M_n)$ со структурными уравнениями (29), типовой слой которого — специальная центролинейная группа $C_{n(n+1)}$.*

Зададим фундаментально-групповую связность в главном расслоении $C_{n(n+1)}(M_n)$ способом Лаптева — Лумисте [7] с помощью форм

$$\hat\theta^i_j = \theta^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k,\ \hat\theta^0_i = \theta^0_i - \Gamma^0_{ij}\omega^j,\ \hat\theta^0_0 = \theta^0_0 - \Gamma_i\,\omega^i, \tag{30}$$

где $\Gamma^i_{jk}, \Gamma^0_{ij}, \Gamma_i$ — функции, для которых найдем дифференциальные уравнения так же, как и в п. 3. Внешние дифференциалы форм (30):

$$d\hat\theta^i_j = \hat\theta^k_j \wedge \hat\theta^i_k + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma^i_{j\underline{k}} + \vartheta^i_{jk}) - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}\omega^k \wedge \omega^l,$$

$$d\hat\theta^0_i = \hat\theta^j_i \wedge \hat\theta^0_j + \hat\theta^0_i \wedge \hat\theta^0_0 - (\Gamma^l_{ij}\Gamma^0_{lk} + \Gamma^0_{ij}\Gamma_k)\omega^j \wedge \omega^k + \tag{31}$$

$$+\,\omega^j \wedge (\Delta\Gamma^0_{i\underline{j}} + \Gamma^0_{ij}\theta^0_0 + \Gamma^k_{ij}\theta^0_k - \Gamma_j\theta^0_i + \theta^0_{ij}),\ \ d\hat\theta^0_0 = \omega^i \wedge (\Delta\Gamma_{\underline{i}} + \theta^0_i).$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [7] зададим на базе M_n поле объекта центролинейной связности $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^0_{ij}, \Gamma_i\}$:

$$\Delta\Gamma^i_{j\underline{k}} + \vartheta^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l,\ \Delta\Gamma_{\underline{i}} + \theta^0_i = \Gamma_{ij}\omega^j,\ \Delta\Gamma^0_{i\underline{j}} + \Gamma^0_{ij}\theta^0_0 + \Gamma^k_{ij}\theta^0_k - \Gamma_j\theta^0_i + \theta^0_{ij} = \Gamma^0_{ijk}\omega^k. \tag{32}$$

Подставим эти дифференциальные уравнения в структурные (31):

$$d\hat\theta^i_j = \hat\theta^k_j \wedge \hat\theta^i_k + \mathcal{R}^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\ \ d\hat\theta^0_0 = \mathcal{R}_{ij}\omega^i \wedge \omega^j,$$

$$d\hat\theta^0_i = \hat\theta^j_i \wedge \hat\theta^0_j + \hat\theta^0_i \wedge \hat\theta^0_0 + \mathcal{R}_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{33}$$

где компоненты объекта центролинейной кривизны $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}^i_{jkl}, \mathcal{R}_{ijk}, \mathcal{R}_{ij}\}$ выражаются по формулам

$$\mathcal{R}^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{|m|l]},\ \mathcal{R}_{ijk} = \Gamma^0_{i[jk]} - \Gamma^l_{i[j}\Gamma^0_{|l|k]} - \Gamma^0_{i[j}\Gamma_{k]},\ \mathcal{R}_{ij} = \Gamma_{[ij]}. \tag{34}$$

Теорема 5. *Фундаментально-групповая связность в главном расслоении специальных центролинейных корепеов $C_{n(n+1)}(M_n)$ задается с помощью поля объекта центролинейной связности $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^0_{ij}, \Gamma_i\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (32) и определяют формы связности (30) со структурными уравнениями (33), причем входящие в них компоненты объекта кривизны центролинейной связности $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}^i_{jkl}, \mathcal{R}_{ijk}, \mathcal{R}_{ij}\}$ выражаются по формулам (34) через компоненты объекта Γ и их пфаффовы производные.*

7. Определения и замечания

1. Приклеенное расслоение линейных кореперов $S_{n(n+1)+\bar{n}}(M_n)$, в котором задана обобщенная линейная связность полем объекта $\Pi = \{\Pi^I_{Jk}\}$, назовем *пространством линейной связности Лаптева* $S_{n(n+1)+\bar{n},\,n}$ (1), (5$_1$), (15).

2. Пространство линейной связности Лаптева $S_{n(n+1)+\bar{n},\,n}$, объект связности которого Π усечен до объекта $\overline{\Pi} = \Pi|_{\Pi^i_{0j}=0} = \{\overline{\Pi}^i_{jk}, \overline{\Pi}^0_{ij}, \overline{\Pi}^0_{0i}\}$, будем называть *пространством предпроективной связности* $S_{n(n+1),\,n}$ (22). Для канонического пространства предпроективной связности $\overset{0}{S}_{n(n+1),\,n}$ объект связности принимает вид $\overline{\overline{\Pi}} = \overline{\Pi}|_{\overline{\Pi}^0_{0i}=0} = \{\overline{\Pi}^i_{jk}, \overline{\overline{\Pi}}^0_{ij}\}$.

Формы предпроективной связности $\widetilde{\theta}^I_J$ не удовлетворяют условию проективности даже в каноническом случае, то есть $\widetilde{\theta}^I_I \neq 0$.

3. Пространство предпроективной связности $S_{n(n+1),\,n}$ с условием проективности, когда объект связности имеет вид $\widehat{\Pi} = \overline{\Pi}|_{\overline{\Pi}^0_{0k}=-\overline{\Pi}^i_{ik}} = \{\overline{\Pi}^i_{jk}, \overline{\Pi}^0_{jk}\}$, является пространством проективной связности Картана (22), (27$_1$), которое обозначается $P_{n,n}$.

4. Нормальное пространство проективной связности Картана $\overset{0}{P}_{n,n}$, получающееся из канонического пространства предпроективной связности $\overset{0}{S}_{n(n+1),\,n}$ с помощью условия проективности, имеет объект связности $\overset{0}{\Pi} = \overline{\overline{\Pi}}\Big|_{\overline{\Pi}^i_{ik}=0} = \widehat{\Pi}\Big|_{\overline{\Pi}^i_{ik}=0}$.

5. Рассмотренные пространства со связностями располагаются по схеме

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & P_{n,n} \arrow[dr] & \\ S_{n(n+1)+\bar{n},\,n} \arrow[r] & S_{n(n+1),\,n} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \overset{0}{P}_{n,n}, \\ & & \overset{0}{S}_{n(n+1),\,n} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

где стрелка указывает, что каждое следующее пространство — особый случай предыдущего.

6. Объекты предпроективной связности $\overline{\Pi}$ и центролинейной связности Γ содержат одинаковое число компонент, которые удовлетворяют разным дифференциальным соотношениям (21) и (32), поэтому их нельзя отождествить: $\overline{\Pi} \neq \Gamma$.

7. Расслоение специальных центролинейных кореперов $C_{n(n+1)}(M_n)$, в котором задана связность с помощью поля объекта Γ, назовем пространством центролинейной связности $C_{n(n+1),n}$ (1), (33). Это пространство дополняет приведенную схему пространств с проективными связностями Картана и их обобщений.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара ВИНИТИ АН СССР. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Лумисте Ю. Г.* Связности в однородных расслоениях : матем. сб. 1966. Т. 69, № 3. С. 434—469.

3. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Cartan E.* Sur les variétés a connexion projective // Bull. Soc. Math. France. 1924. T. 52. P. 205–241.

5. *Шевченко Ю. И.* Обобщенная фундаментально-групповая связность // Известия пензенского гос. пед. ун-та им. В. Г. Белинского. Физ.-мат. и техн. науки. 2011. № 26. С. 304—310.

6. *Шевченко Ю. И.* О проективных связностях на неголономной поверхности // Инвар. методы исслед. на многообр. структур геом., анализа и мат. физ. М., 2001. Ч. 2. С. 216—226.

7. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 1—248.

Об авторе

Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: EScrydlova@kantiana.ru

About the authors

Dr Yuri Shevchenko — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

Email: EScrydlova@kantiana.ru