4. Получаем следующую геометрическую интерпретацию характеристических направлений отображения φ.

Т е о р е м а 3. Направление в точке $P \in P_N$ будет характеристическим направлением отображения φ в том и только в том случае, если образ прямой, определяющей это направление, имеет в $\varphi(P)$ геометрическое касание второго порядка с геодезической пространства с метрикой $ds^2 = F$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.1. статьи [6] и теоремы 2.

Список литературы

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Тр.геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1969, с.179-206.

2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. -"Геометрия 1963" Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР, 1965, с.65-107.

3. Vrănceanu G. Sul. tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proettivi. Boll. unione mat. ital., 1957, 12, №4, 489-506.

4. Розенфельд Б.А. Проективная геометрия как метрическая геометрия.-Тр.семинара по векторному и тензорн. анализу. 1950. Вып.8, с.328-354.

5. Андреев Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар.-В кн. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.5. Калининград, 1974, с.6-24.

6. Андреев Б.А. Некоторые вопросы геометрии многообразий пар фигур.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. Калининград, 1981, с.8-12.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I5 1984

УДК 514.75

Г.П. Б о ч и л л о

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ П-МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В данной работе рассматриваются m-распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства P_n. В смысле [1] Δ_m являются распределениями касательных элементов, порожденных m-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов. Под гиперплоским элементом $\{A, \alpha\}$, как и в [2], понимается пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n. Во всех трех случаях ($m<n$, $m=n$, $n<m<2n-1$) дается геометрическая характеристика распределения. Доказывается, что задание распределения Δ_m на M_{2n-1} в каждом случае означает одновременно задание и некоторого дополнительного распределения Δ^*_{2n-m-1}. Дается его геометрическая характеристика. Доказывается, что распределение Δ_m на M_{2n-1} ($m<n$) (пфаффова структура [3] на M_{2n-1}) порождает псевдориманову структуру на этом многообразии.

В работе индексы принимают следующие значения: $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = 0, \overline{1, n}$; $i, j, k = \overline{1, n}$; $p, q, r = \overline{1, n-1}$; в случае $m<n$: $u, v, w = \overline{1, m-1}$; $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = \overline{m, n-1}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m-1}, n$; в случае $n<m<2n-1$ $(m = n+m_0-1)$: $a, b, c = 1, m_0-1$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \overline{m_0, n-1}$. Кроме того, оператор ∇ обозначает известную [3] операцию и $\omega^i \equiv \omega^i_0$; $\omega_p \equiv \omega^n_p$.

I. Распределения Δ_m на M_{2n-1}. Присоединим к каждому элементу $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R = \{A_\mathcal{I}\}$ и тангенциальные $\tau = \{\alpha^\mathcal{I}\}$ подвижные реперы, деривационные формулы которых имеют вид $dA_\mathcal{I} = \omega^\mathcal{J}_\mathcal{I} A_\mathcal{J}$, $d\alpha^\mathcal{I} = -\omega^\mathcal{I}_\mathcal{J} \alpha^\mathcal{J}$, причем I-формы $\omega^\mathcal{J}_\mathcal{I}$ удовлетворяют условиям $d\omega^\mathcal{J}_\mathcal{I} = \omega^\mathcal{K}_\mathcal{I} \wedge \omega^\mathcal{J}_\mathcal{K}$, $\omega^0_0 + \omega^1_1 + \omega^2_2 + \ldots + \omega^n_n = 0$. Положив $A = A_0$, $\alpha = \alpha^n$, перейдем к реперам R_0, τ^0 нулевого порядка, в которых структурными формами многообразия M_{2n-1} являются $(2n-1)$ форм $\omega^r, \omega^n_u, \omega_p$. Распределение Δ_m на M_{2n-1} можно определить [4] системой $(2n-m-1)$ линейно независимых уравнений Пфаффа.

1. В случае $m<n$:

$$\omega^{\bar u}_0 = \Lambda^{\bar u}_{0\alpha}\omega^\alpha,\ \omega^n_{\bar u} = \Lambda^n_{\bar u\alpha}\omega^\alpha,\ \omega^n_u = \Lambda^n_{u\alpha}\omega^\alpha,\ R\|\Lambda^n_{u\alpha}\| = m-1; \quad (1)$$

2. В случае $m=n$:

$$\omega^n_p = \Lambda^n_{pi}\omega^i; \quad (2)$$

3. В случае $n<m<2n-1$:

$$\omega^n_{\bar a} = \Lambda^n_{\bar a i}\omega^i + \Lambda^{nb}_{\bar a}\omega_b. \quad (3)$$

Причем каждая из систем (1),(2),(3) инвариантна относительно подгруппы стационарности гиперплоского элемента $\{A,\alpha\}$, что обеспечивается заданием на M_{2n-1} соответствующих полей геометрических объектов

$$\Gamma^{I}_1 = \{\Lambda^{\bar u}_{0\alpha}, \Lambda^n_{\bar u\alpha}, \Lambda^n_{u\alpha}\},\ \Gamma^{II}_1 = \{\Lambda^n_{pi}\},\ \Gamma^{III}_1 = \{\Lambda^n_{\bar a i}, \Lambda^{nb}_{\bar a}\},$$

определяемых вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа:

$$\mathrm{I}\begin{cases}\nabla\Lambda^{\bar u}_{0\alpha} - \Lambda^{\bar u}_{0\beta}\Lambda^{\bar v}_{0\alpha}\omega^\beta_{\bar v} + \omega^{\bar u}_\alpha = \Lambda^{\bar u}_{0\alpha i}\omega^i + \Lambda^{\bar u p}_{0\alpha}\omega_p,\\ \nabla\Lambda^n_{p\alpha} + \Lambda^n_{p\alpha}\omega^0_0 + \Lambda^n_{p\beta}\Lambda^{\bar v}_{0\alpha}\omega^\beta_{\bar v} - \delta^n_\alpha\omega^0_p = \Lambda^n_{p\alpha i}\omega^i + \Lambda^{nq}_{p\alpha}\omega_q;\end{cases}$$

$$\mathrm{II}\ \ \nabla\Lambda^n_{pi} + \Lambda^n_{pi}\omega^0_0 - \delta^n_i\omega^0_p = \Lambda^n_{pij}\omega^j + \Lambda^{nq}_{pi}\omega_q;$$

$$\mathrm{III}\begin{cases}\nabla\Lambda^n_{\bar a p} + \Lambda^n_{\bar a p}\omega^0_0 + \Lambda^{nc}_{\bar a}\Lambda^n_{\bar c p}\omega^{\bar c}_c = \Lambda^n_{\bar a p i}\omega^i + \Lambda^{nq}_{\bar a p}\omega_q,\\ \nabla\Lambda^n_{\bar a n} - \Lambda^n_{\bar a p}\omega^p_n + \Lambda^{nc}_{\bar a}\Lambda^n_{\bar c n}\omega^{\bar c}_c + \Lambda^{nb}_{\bar a}\omega^0_b - \omega^0_{\bar a} = \Lambda^n_{\bar a n i}\omega^i + \Lambda^{np}_{\bar a n}\omega_p,\\ \nabla\Lambda^{na}_{\bar a} - \Lambda^{na}_{\bar a}\omega^n_n - \omega^a_{\bar a} + \Lambda^{nb}_{\bar a}\Lambda^{na}_{\bar c}\omega^{\bar c}_b = \Lambda^{nu}_{\bar a n i}\omega^i + \Lambda^{nup}_{\bar a}\omega_p.\end{cases}$$

2. Геометрическая характеристика распределения Δ_m. Рассматривая разложения $dA_0 = \omega^0_0 A_0 + \omega^i A_i$, $d\alpha^n = -\omega^n_0\alpha^0 - \omega_p\alpha^p - \omega^n_n\alpha^n$ при условии (1),(2),(3) соответственно, получаем, что задание распределения Δ_m на M_{2n-1} эквивалентно заданию следующих геометрических конструкций, инвариантность которых и обеспечивается соотношениями (4),(5),(6) соответственно.

1. В случае $m<n$ получаем (см. также [2]), что эта конструкция состоит из

а) m-плоскости L_m, инцидентной точке A_0, но не принадлежащей α^n и такой, что $L_m = [A_0 dA_0]$ вдоль всех интегральных 1-семейств системы (I);

б) $(n-m-1)$-плоскости ℓ_{n-m-1}, инцидентной гиперплоскости α^n, но не содержащей точки A_0 и такой, что $\ell_{n-m-1} = [\alpha^n d\alpha^n]$ вдоль тех же интегральных 1-семейств;

в) отображения множества всех прямых $[A_0 dA_0]$ в L_m, проходящих через A_0, на множество всех $(n-2)$-плоскостей $[\alpha^n d\alpha^n]$ в α^n, инцидентных ℓ_{n-m-1}.

II. В случае $m=n$ эта конструкция состоит из отображения множества всех прямых $[A_0 dA_0]$ на множество всех $(n-2)$-плоскостей $[\alpha^n, \omega^n_0\alpha^0 + \omega^n_p\alpha^p]$, инцидентных A_0 и α^n соответственно.

III. В случае $n<m<2n-1$ эта конструкция состоит из а/ (m_0-1)-плоскости L_{m_0-1}, инцидентной A_0 и α^n одновременно и такой, что $L_{m_0-1} = [A_0 dA_0]$ вдоль всех тех интегральных 1-семейств системы (3), когда неподвижна гиперплоскость α^n $(\omega^n_p = \omega^n_0 = 0)$;

б/ $(n-m_0)$-плоскости ℓ_{n-m_0}, инцидентной A_0 и α^n одновременно и такой, что $\ell_{n-m_0} = [\alpha^n d\alpha^n]$ вдоль всех тех интегральных 1-семейств системы (3), когда неподвижна точка A_0 $(\omega^i_0 = 0)$;

в/ отображения множества всех прямых $[A_0 dA_0]$ в ℓ_{n-m_0}, инцидентных A_0, на множество всех $(n-2)$-плоскостей $[\alpha^n d\alpha^n]$, инцидентных L_{m_0-1}.

3. Распределение Δ^*_{2n-m-1} на M_{2n-1}.

П р е д л о ж е н и е 1. Задание распределения Δ_m на M_{2n-1} означает также одновременное задание некоторого инвариантного дополнительного распределения Δ^*_{2n-m-1} на многообразии M_{2n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Распределение Δ^*_{2n-m-1}, дополнительное к распределению Δ_m (I)-(3), может быть определено следующими системами m линейно независимых уравнений Пфаффа: в случае $m<n$ $\omega^\alpha = 0$; в случае $m=n$ $\omega^i = 0$; в случае $n<m<2n-1$ $\omega^i = \omega_a = 0$. Вычисления показывают, что каждая из систем форм $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega^i\}$, $\{\omega^i, \omega_a\}$ относительно инвариантна в силу тех же соотношений (4),(5),(6), которые обеспечивают относительную инвариантность систем форм в уравнениях (I),(2),(3) соответственно.

4.Геометрическая характеристика распределения Δ^{*}_{2n-m-1}. Найдем касательную в точке A_0 вдоль некоторого 1-семейства $M_1(t^p,t^n,t_p)$ многообразия M_{2n-1} $[A_0 dA_0]=[A_0, t^pA_p+t^nA_n]$ и двойственный образ-характеристику гиперплоскости α^n вдоль того же 1-семейства $[\alpha^n, t_p\alpha^p+t^n\alpha^0]$. Здесь $\omega^p=t^p\theta$, $\omega^n=t^n\theta$, $\omega_p=t_p\theta$ и величины t^p, t^n, t_p образуют геометрический объект. Рассматривая эти геометрические образы вдоль интегральных 1-семейств систем (I),(2),(3) соответственно, получаем следующее

П р е д л о ж е н и е 2. Распределение Δ^{*}_{2n-m-1} на M_{2n-1} характеризуется тем, что вдоль каждого его интегрального 1-семейства в случае $m<n$ касательная в точке A_0 инцидентна плоскости $\ell_{n-m}=[A_0\, \ell_{n-m-1}]$ и характеристика гиперплоскости α^n содержит точку A_0; в случае $m=n$ точка A_0 неподвижна и характеристика гиперплоскости ей инцидентна; в случае $n<m<2n-1$ точка A_0 неподвижна, а характеристика гиперплоскости α^n инцидентна плоскости ℓ_{n-m_0}.

Обозначим Δ^{*}_{n-1} -распределение на M_{2n-1}, которое характеризуется тем, что точка A_0 неподвижна вдоль любого его интегрального 1-семейства. Оно инволютивно и определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа $\omega^i=0$.

П р е д л о ж е н и е 3. Дополнительное к Δ_m распределение Δ^{*}_{2n-m-1} на M_{2n-1} в случае $m<n$ содержит подраспределение Δ^{*}_{n-1}; в случае $m=n$ совпадает с Δ^{*}_{n-1}; в случае $n<m<2n-1$ является неинволютивным (в общем случае) подраспределением распределения Δ^{*}_{n-1}.

Доказательство вытекает из рассмотрения систем уравнений Пфаффа, определяющих распределения Δ^{*}_{n-1} и Δ^{*}_{2n-m-1} в каждом случае.

З а м е ч а н и е. Наличие дополнительного распределения Δ^{*}_{2n-m-1} к распределению Δ_m на M_{2n-1} позволяет утверждать, что если на M_{2n-1} введена связность, то она индуцирует связность на распределении Δ_m и дополнительном к нему распределении Δ^{*}_{2n-m-1}.

5.Псевдориманова структура на M_{2n-1}. В случае $m<n$ распределение Δ_m порождает m-пару подпространств $\{L_m+\ell_{n-m-1}\}$. Известно [5],[6], что m-пара подпространств индуцирует инвариантную невырожденную квадратичную форму. Обозначим ее Φ. Используя систему (4), перейдем (в случае $m<n$) к реперам R_1 и τ^1, адаптированным распределению Δ_m, так, что система (I) принимает вид $\omega^{\bar u}_0=0$, $\omega^n_{\bar u}=0$, $\omega^n_u=\Lambda^n_{uv}\omega^v$, $\det\|\Lambda^n_{uv}\|\neq 0$ и $L_m=[A_0 A_u A_n]$, $\ell_{n-m-1}=[\alpha^0, \alpha^u, \alpha^n]$. Тогда соотношения (4) принимают вид:

$$\omega^{\bar u}_{\alpha}=\Lambda^{\bar u}_{0\alpha i}\omega^i+\Lambda^{\bar u p}_0\omega_p,\ \Lambda^n_{uv}\omega^u_{\bar u}=\Lambda^n_{\bar u v i}\omega^i+\Lambda^{np}_{\bar u v}\omega_p,\ \omega^0_{\bar u}=\Lambda^n_{\bar u n i}\omega^i+\Lambda^{np}_{\bar u n}\omega_p;\ \nabla\Lambda^n_{uv}\omega^u_{\bar u}+\Lambda^n_{uv}\omega^0_0=\Lambda^n_{uvi}\omega^i+\Lambda^{np}_{uv}\omega_p,\ \Lambda^n_{uv}\omega^v_n+\omega^0_u=\Lambda^n_{uni}\omega^i+\Lambda^{np}_{un}\omega_p.$$

В репере R_1 форма Φ имеет следующий вид: $\Phi\equiv\omega^{\bar u}_0\omega^0_{\bar u}+\omega^{\bar u}_u\omega^u_{\bar u}+\omega^n_{\bar u}\omega^{\bar u}_n$. Таким образом, имеем

П р е д л о ж е н и е 4. Пфаффова структура на M_{2n-1} (m-распределение Δ_m на M_{2n-1}) индуцирует псевдориманову структуру на этом многообразии.

З а м е ч а н и е. Аналогичные квадратичные формы могут быть построены и в случаях $m\geqslant n$, для чего надо использовать компоненты геометрических объектов следующего порядка.

Поэтому предложения, аналогичные предложению 4, могут быть сформулированы и в случаях $m\geqslant n$.

Список литературы

I.Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов.- Тр.геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР,1971,т.3,с.29-48.

2.Онищук Н.М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов п-мерного центроаффинного пространства ($m<n$).-Тр.Томского ун-та,1977,вып.I8,с.59-71.

3.Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин,1977.

4.Лумисте Ю.Г. Распределения на однородных пространствах.-Проблемы геометрии,ВИНИТИ АН СССР,1977,т.8,с.5-25.

5.Гейдельман Р.М. Теория аналитических конгруэнций плоскостей в комплексных и двойных унитарных неэвклидовых пространствах и проективная теория конгруэнций пар плоскостей.-Матем.сб.,1959,т.49 (91),№3,с.281-316.

6.Ивлев Е.Т.,Кондакова Э.М. К многомерной проективно-дифференциальной геометрии многообразий невырожденных нуль-пар.-Тр.СФТИ,Томск,Вып.64,1973,с.232-262.