УДК 524.834

*А. В. Асташёнок, А. В. Юров, А. В. Япарова*

# НОВЫЕ КЛАССЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ И СОГЛАСОВАННЫЕ МОДЕЛИ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ



*Развит метод построения точных космологических решений уравнений Эйнштейна, основанный на их представлении в форме линейного дифференциального уравнения второго порядка. Метод позволяет, в частности, использовать произвольное известное решение для построения более общего, параметризованного двумя константами. Показано, что в определенном случае возникающие новые классы точных решений содержат особенности, обладающие следующим свойством: геодезическая, начинающаяся или заканчивающаяся в сингулярности, имеет бесконечную длину. Такая сингулярность приводит к отсутствию горизонтов событий (если это сингулярность будущего). В этом случае, вероятно, можно построить космологическую модель, удовлетворяющую требованиям согласованности в течение всего времени существования вселенной.*

*A method for construction of exact cosmological solutions of Einstein equations is developed. The method is based on representation of these equations as a second-order linear differential equation. Particularly, the method allows to construct a more general solution, parametrized by two constants, using any known solution. Also it is shown, that in a specific case new classes of exact solutions have singularities with the following property: a geodesic, which begins or ends in the singularity, has an infinite length. Such a singularity leads to an absence of event horizons (if this is a future singularity). In this case it might prove possible to construct cosmological model, satisfying every consistency requirement during a universe lifetime.*

**Ключевые слова:** уравнения Эйнштейна — Фридмана, скалярное поле, преобразование Дарбу.

**Keywords:** Einstein — Friedman equations, scalar field, Darboux transformation.

## Введение

В работе [1] предложен подход для нахождения точных решений уравнений Фридмана. Основная идея выглядит следующим образом: в плоской вселенной функция, равная масштабному фактору в кубе $\psi = a^3$, удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = 12\pi G\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)\psi. \qquad (1)$$

Обозначения стандартны: $\rho$ – плотность, а $p$ – давление материи. Если вселенная заполнена скалярным полем с минимальной связью $\phi$ с потенциалом самодействия $V(\phi)$ и вакуумной энергией с плотностью $\Lambda$, то (1) оказывается в точности стационарным одномерным уравнением Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = (U - \lambda)\psi\ , \tag{2}$$

где $U(t) = 24\pi GV$, а «энергия» $\lambda = -24\pi G\Lambda$. Разумеется, потенциал $V$ следует считать функцией времени: $V(t) = V(\phi(t))$ [1]. Конечно, для явного представления потенциала в таком виде необходимо знать точные решения полевых уравнений, однако можно поступить иначе — задать явный вид $U(t)$ как функции времени и начальные условия, после чего решить (2) и определить масштабный фактор. Если не фиксировать начальное условие, то масштабный фактор автоматически окажется зависящим от двух произвольных констант, одна из которых может быть поглощена трансляцией по времени, а вторая может дать весьма нетривиальную динамику. Эта идея частично реализована в работе [1] на примере трех моделей: гармонического осциллятора ($U \sim t^2$), степенного ($U \sim t^{-2}$) и односолитонного (безотражательного) ($U \sim 1/\mathrm{ch}^2 t$) потенциалов. Главным выводом обсуждаемой работы является то, что для всех трех типов моделей возникает инфляция. Вывод: инфляция возникает при самых общих видах потенциалов.

Однако с выходом из инфляции ситуация обстоит куда проблематичнее[1]. Уравнение (2) в космологии исследовалось в работах [2] и [3] с помощью формализма преобразования Дарбу (ПД)[2]. Показано, в частности, что выбирая соответствующим образом функции, входящие в определитель Крама, можно получать решения с интересным асимптотическим поведением. Например, известно, что решения уравнения Шрёдингера, принадлежащие пространству функций, интегрируемых с квадратом $L^2$, ПД преобразуют в функции из этого же пространства, если опорные функции не имеют особенностей и демонстрируют наличие перемежающихся нулей. Правильная асимптотика позволяет проконтролировать выход из инфляции, и потому это свойство ПД вызывает большой интерес в контексте конструирования интегрируемых космологических моделей в плоском пространстве.

Одним из самых интересных и неожиданных результатов, полученных при изучении космологических моделей с помощью (2), является то, что решения этого уравнения демонстрируют нарушение слабого

[1] Так, авторы цитируемой работы предложили такую модификацию потенциалов, чтобы параметры оказались зависящими от температуры. Тогда выход на фридмановский режим можно описывать как фазовый переход в материи ранней вселенной.

[2] В работе [4] аналогичная техника использовалась для построения точных решений на бране и в объемлющем пространстве, снабженном структурой орбиобразия.

энергетического условия[3], причем оно имеет место как следствие динамической эволюции в процессе расширения вселенной. В работе [5] этот удивительный феномен был назван эффектом гладкой фантомизации, а позднее его стали называть эффектом пересечения фантомной зоны. В упомянутой работе было показано, что пересечение фантомной зоны (ПФЗ) вполне естетственно может быть описано в популярных космологических моделях со скалярным полем. Другими словами, уравнения Фридмана демонстрируют совершенно новый физический эффект или (и такая точка зрения тоже имеет право на существование) патологическое поведение. В любом случае очевидно, что предложенный в [1] и развитый в последующих работах метод является весьма эффективным и плодотворным.



В настоящем исследовании мы предлагаем модификацию данного метода. Из уравнений Эйнштейна следует, что функция более общего вида $\psi_n = a^n$ тоже удовлетворяет уравнению Шрёдингера с зависящим от n потенциалом (мы будем его обозначать $U_n$), который оказывается некоторой линейной комбинацией давления (деленного на квадрат скорости света) и плотности. Задавая историю «потенциала», можно получать решения для функции $\psi_n$ и, таким образом, для масштабного фактора. Ясно, что даже для одной временной зависимости $U_n(t)$ спектр решений существенно расширяется.

Мы упоминали выше, что наш метод применялся в плоском случае. При наличии ненулевой кривизны данный подход оказывается намного менее эффективным просто потому, что для произвольной степени $n$ функции $\psi_n = a^n$ удовлетворяют уже нелинейному уравнению, а не уравнению типа (2). Для нелинейных уравнений, получаемых путем такой процедуры, общие или эффективные методы точного интегрирования неизвестны. Это приводит к тому, что в общем случае не удается построить решение, параметризованное двумя константами интегрирования, а именно это необходимо для реализации процедуры, аналогичной проведенной в работе [1]. Однако для $n = 1$ ситуация упрощается.

В этом случае роль «пси-функции» играет непосредственно масштабный фактор. Действительно, одно из уравнений Эйнштейна в метрике Фридмана оказывается линейным уравнением второго порядка, причем роль потенциала (с точностью до множителя, пропорционального ньютоновской константе) играет величина $\rho + 3p/c^2$, взятая с отрицательным знаком. Тогда физический смысл «потенциала» тоже становится понятным: при нулевой вакуумной энергии знак потенциала определяет, выполняется или нарушается сильное энергетическое условие. Это особенно полезно ввиду того, что нарушение сильного энергетического условия является необходимой (но не достаточной) причиной генерации инфляции. Из-за важности вопроса мы посвятим случаю $n = 1$ отдельный раздел. Изучение этих моделей приведет нас

---

[3] В работе принята следующая терминология: мы говорим, что выполнено сильное энергетическое условие, если справедливы неравенства $\rho + p/c^2 \geq 0$, $\rho + 3p/c^2 \geq 0$. Слабое же энергетическое условие или условие энергодоминантности подразумевает выполнение $\rho \geq 0$, $\rho + p/c^2 \geq 0$.

к еще одному замечательному наблюдению: построенные нашим методом двухпараметрические точные решения в чрезвычайно общем случае демонстрируют отсутствие горизонтов событий на фазе сжатия. Другими словами, геодезические в такой вселенной продолжаются неограниченно. Мы считаем, что это свойство является чрезвычайно важным для решения следующей амбициозной задачи — построение космологической модели, физически согласованной *в течение всего* времени своего существования.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 описывается сам метод. Далее, действуя аналогично работе [1], мы рассматриваем примеры точных решений, используя для этого известные (и немногочисленные) потенциалы, для которых уравнение Шредингера может быть решено точно в аналитическом виде. В разделе 3 отдельно рассматриваются упомянутые выше решения, не содержащие горизонтов событий, и поясняется, почему с нашей точки зрения такие космологические модели представляют огромный интерес. В разделе 4 мы кратко описываем метод преобразований Дарбу, позволяющий строить новые решения. В последнем разделе подводятся итоги работы.

## 1. Процедура линеаризации

Система уравнений Эйнштейна — Фридмана имеет вид

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{2}\rho-\frac{kc^2}{a^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right). \tag{4}$$

Пусть функция $a = a(t)$ для заданных $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$ является решением (3), (4), причем $k = 0$. Тогда $\psi_n = a^n$ — решение уравнения

$$\ddot{\psi}_n=U_n(t)\psi_n, \tag{5}$$

то есть уравнения Шрёдингера со сложным «потенциалом» вида $U_n(t) = 8\pi G(n^2\rho - (3n/2)(\rho + p/c^2))/3$.

В случае, когда вселенная заполнена самодействующим скалярным полем $\varphi$ *и* лагранжиан имеет стандартную форму $L=\dfrac{\dot{\phi}^2}{2c^2}-V(\phi)$,

$$U_n=\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{n(n-3)}{2c^2}\dot{\phi}^2+n^2V(\phi)\right).$$

Случай, когда $n = 3$ $U_3 = 72\pi G/3$, подробно исследован в [1].

**Замечание 1**. Если одновременно с полями материи во вселенной присутствует ненулевая космологическая постоянная (с $\rho_\Lambda c^2$), то уравнение (5) выглядит как классическая задача на собственные значения:

$$\ddot{\psi}_n=\left(U_n(t)-\lambda_n\right)\psi_n \tag{6}$$

со спектральным параметром, определенным соотношением $\lambda_n = -8\pi G n^2\rho_\Lambda/3$. Постановка задачи на собственные значения и собственные функции для (6) требует дополнительно наличия однородных начальных (независимая переменная здесь время, поэтому мы и говорим о начальном, а не граничном условии) условий. Тот факт, что вакуумная энергия в такой форме выступает как собственное значение, оказался достаточно неожиданным, и не исключено, что на нашем пути удастся прояснить загадку вычисления этой величины (эта идея была впервые высказана в [1]). Очевидно, подобная гипотеза правомочна и в случае уравнения (6), и в разделе 2 мы обсудим эту интригующую возможность. Пока что заметим, что если известно частное решение (6), то используя (3) и (6), можно найти скалярное поле и потенциал в виде простой квадратуры:



$$\phi(t) = \pm\frac{c}{2\sqrt{n\pi G}}\int dt\sqrt{\frac{\dot{\psi}_n^2}{\psi_n^2} - U_n + \lambda_n}\,, \tag{7}$$

$$V(t) = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{U_n}{n} + \frac{3-n}{n^2}\left(\frac{\dot{\psi}_n^2}{\psi_n^2} + \lambda_n\right)\right). \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) позволяют вычислить $V = V(\phi)$. Разумеется, в явном виде это можно сделать лишь в редких случаях, поскольку интегралы в общем виде выражаются с помощью специальных функций, а процедура обращения функции вообще редко осуществима в явном виде.

Общее решение (5) имеет вид

$$\Psi_n = c_1\psi_n + c_2\hat{\psi}_n\,, \tag{9}$$

где $\hat{\psi}_n$ — другое линейно независимое решение, то есть вронскиан, построенный на этих двух функциях, равен единице:

$$\hat{\psi}_n(t) = \psi_n(t)\int^t \frac{dt'}{\psi_n^2(t')} \equiv \psi_n(t)\xi(t)\,. \tag{10}$$

Отсюда вытекает следующая теорема:

**Линеаризационная теорема**. Пусть $a = a(t)$ — решение (3), (4) в плоском пространстве при заданных функциях $\rho$ и $p$. Тогда двухпараметрическая функция $a_n = a_n(t; c_1, c_2)$

$$a_n = a\left(c_1 + c_2\int\frac{dt}{a^{2n}}^{1/n}\right) \tag{11}$$

удовлетворяет системе (3), (4) с новой плотностью энергии $\rho_n$ и новым давлением $p_n$, причем

$$n^2\rho_n - \frac{3n}{2}\left(\rho_n + \frac{p_n}{c^2}\right) = n^2\rho - \frac{3n}{2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right). \tag{12}$$

**Замечание 2**. Линеризационная теорема справедлива для случая $k = 0$. Если $k = \pm 1$, то следует положить $n = 0{,}1$.

Приведем несколько примеров точных решений.

## 2. Генерация решений при фиксированном $U_n(t)$

В качестве простых «потенциалов» $U_n(t)$ рассмотрим три типа:

$$U_n(t) = \mu^2 t^2, \qquad (a)$$

$$U_n(t) = \frac{m}{t^2},\ m = \text{const}, \qquad (b)$$

$$U_n(t) = -\frac{2\lambda_0}{\text{ch}^2(\lambda_0 t)} \qquad (c)$$

и исследуем решения для потенциалов ($a$), ($b$), ($c$) на предмет существования инфляционных режимов и выхода из них.

($a$) Решением уравнения (6) с нулевыми граничными условиями при $t \to \pm\infty$ являются функции

$$\psi_n = A^n H_s(\mu t)\exp(-\mu t^2/2n),$$

где $A$ – постоянная; $H_s(\mu t)$ – полиномы Эрмита порядка $s$.

Соответственно динамика масштабного фактора имеет вид

$$a(t) = AH_s^{1/n}(\mu t)\exp\left(-\mu t^2/2n\right).$$

В простейшем случае $\psi_n = \exp(-\mu t^2/2)$. Рассмотрим этот случай ($n = 1$) подробнее, принимая во внимание, что при $n = 1$ $k$ необязательно равно нулю.

В общем виде решение для масштабного фактора:

$$a(t) = a_0\exp\left(\mu\left(t_0^2 - t^2\right)/2\right), \tag{13}$$

где $t_0$ — момент времени, отвечающий наблюдению, сделанному в настоящее время; $a_0 = 10^{28}$ см — текущее значение масштабного фактора; параметр $\mu$ *выражается* через $t_0$; наблюдаемое значение постоянной Хаббла $H_0 = 24{,}3\times 10^{-19}$ секунда$^{-1}$: $\mu = -H_0/t_0$.

Это решение представляет самостоятельный интерес, поскольку содержит свободный параметр $t_0$. Как следует из (3), верно соотношение

$$\frac{\ddot{a}^2(t_0)}{a(t_0)} = \frac{H_0}{t_0}\left(1 + H_0 t_0\right). \tag{14}$$

С другой стороны, наблюдения свидетельствуют об ускорении вселенной. Выражая вторую производную,

$$\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \frac{8\pi G}{3}\times\left(0{,}7\rho_c\right) = \frac{7H_0^2}{10}. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), легко выразить $t_0$ через $H_0$:

$$t_0 = -\frac{10}{3H_0}. \tag{16}$$

Возраст вселенной $T$ будем отмерять от момента времени $t_{pl}$, когда $a(t_{pl}) = a_{pl} = 10^{-33}$ см. За этот интервал вселенная совершила

$$N = \ln\frac{a_0}{a_{pl}} = 61\ln 10 = 140{,}458$$

е-расширений. Полагая $t_{pl} = t_0 - T$ и учитывая (16), получаем квадратное уравнение

$$3H_0^2T^2 + 20H_0T - 20N = 0\,,$$

откуда находим возраст вселенной в годах:

$$T = \frac{2\left(\sqrt{25+15N}-5\right)}{3H_0} = \frac{27{,}448}{H_0} = 358{,}18\times 10^9\,. \quad (17)$$



Это на два порядка больше реальной величины $15-20\times10^9$ лет. Тем не менее надо иметь в виду, что формально возраст такой вселенной равен бесконечности, а 358 миллиардов лет — это промежуток времени, прошедший от момента, когда масштабный фактор имел планковский размер, до настоящего момента. Определение именно этого момента времени как «начала» выглядит естественным, но это не означает, что такой выбор действительно правилен.

Промежуток времени между современной эпохой ($t = t_0$) и моментом $t = t_1$ смены знака у ускорения $\left(\ddot{a}(t_1) = 0\right)$ составляет (в годах)

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0 = \frac{10-\sqrt{30}}{3H_0} = 19{,}67\times10^9\,,$$

а время от текущего момента до момента времени $t = t_2$, когда имеет место большая остановка $\left(\dot{a}(t_2 = 0)\right)$ составляет

$$\Delta t_2 = 10/(3H_0) = 43{,}5\times10^9 \text{ лет}^4.$$

Отдельно необходимо исследовать выполнение слабого и сильного энергетических условий. Очевидно,

$$\begin{aligned} \rho + \frac{p}{c^2} &= \frac{3H_0^2A_0^2 + 10kc^2\,\mathrm{e}^{3H_0^2t^2/10}}{40\pi GA_0^2}, \\ \rho + \frac{3p}{c^2} &= -\frac{9H_0^2\left(3H_0^2t^2-10\right)}{400\pi G}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_0 = a_0\mathrm{e}^{5/3}$.

Из (18) следует, что слабое энергетическое условие нарушается при достаточно поздних временах $|t|$ во вселенных с отрицательной кривизной ($k = -1$) и всегда выполняется в плоских и закрытых моделях.

[4] Заметим, что дискуссии по поводу величины современного значения параметра Хаббла $H_0 = h\times0{,}324\times10^{-19}$ обратных секунд пока не прекратились. Наиболее распространена точка зрения, согласно которой $h = 75$. Именно этот случай рассматривается здесь и в дальнейшем. Если использовать нижнее возможное значение $h = 45$, то $\Delta t_1 = 32{,}79\times10^9$ лет, а $\Delta t_2 = 72{,}5\times10^9$ лет.

Ускорение имеет место в течение бесконечных интервалов в прошлом и будущем, на временах $|t| > \sqrt{10}/\left(H_0\sqrt{3}\right)$, а отсутствует лишь на конечном интервале времени. В современную эпоху $t = t_0$ плотность составляет

$$\rho_0 = \rho(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} + \frac{3kc^2}{8\pi G a_0^2}.$$

Используя численные значения, находим, что $\rho_0 = -0{,}123 \times 10^{-28}$ г/см$^3$ при $k = -1$, $\rho_0 = 0{,}38 \times 10^{-29}$ г/см$^3$ при $k = 0$ и $\rho_0 = 0{,}2 \times 10^{-28}$ г/см$^3$ при $k = +1$. Отсюда становится очевидным, что случай отрицательной кривизны неизбежно приводит к нарушению условия энергодоминантности в настоящее время.



Несложно вычислить и величину вакуумной энергии. Предположим, что вселенная заполнена самодействующим скалярным полем $\phi$ с минимальной связью и потенциалом $V = V(\phi)$ и — дополнительно — космологической постоянной с плотностью $\rho_\Lambda$ (часто вакуумную энергию отождествляют с минимумом потенциала, но мы ввели ее как самостоятельную величину). Тогда

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_\phi + \frac{3p_\phi}{c^2}\right) + \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} = 4\mu^2 t^2 - 2\mu.$$

Отсюда следует, что, во-первых, $\rho_\Lambda = -9H_0^2/(80\pi G) = -0{,}3\rho_c$, а во-вторых, форма потенциала $V(\phi)$ имеет вид

$$V(\phi) = \frac{9H_0^2\phi^2}{20c^2}.$$

Значит, скалярное поле в нашей модели описывает невзаимодействующие скалярные частицы с очень маленькой массой — $m \sim 0{,}3 \times 10^{-60}$ г, что на 33 порядка меньше массы электрона. Кроме того, плотность вакуумной энергии оказывается отрицательной.

Но согласуется ли описанная простая модель с фактом существования галактик? На первый взгляд, наличие очень большой величины ускорения в прошлом должно препятствовать образованию наблюдаемой крупномасштабной структуры, что указывает на неадекватность нашей модели. Удивительно, но это не так.

Пусть $\rho_M$ – плотность барионного вещества, которая в настоящее время равна $\rho_{M0}$. Эти два значения связаны друг с другом известным соотношением

$$\rho_M = \rho_{M0}(1 + z)^3, \qquad (19)$$

где $z$ — величина красного смещения.

Ограничения на модуль ускорения получаются из требования, чтобы величина $\tilde{\rho}_v = 3\ddot{a}/(8\pi G a)$ была меньше правой части (19) при $z = z_m$, что соответствует моменту, когда формировались самые ранние галактики:

$$\tilde{\rho}_v \le \rho_{M0}(1 + z_m)^3. \qquad (20)$$

При $z_m = 4{,}5$ получаем $\tilde{\rho}_v \le 170\rho_{M0}$, а при $z_m = 10$ (известная величина красного смещения, часто рассматривающаяся как верхний наблюдаемый предел) $\tilde{\rho}_v \le 4000\rho_{M0}$. В дальнейшем мы будем использовать именно такую величину красного смещения.

Формула (13) позволяет вычислить промежуток времени, который потребовался бы свету, испущенному галактикой с величиной красного смещения $z_m = 10$, чтобы достигнуть нас в настоящий момент времени:

$$T = \frac{2}{3}\frac{-5+\sqrt{25+15\ln 11}}{H_0},$$

что дает $T = 24{,}43 \times 10^9$ лет. В момент испускания величина $\tilde{\rho}_v$ составляла

$$\tilde{\rho}_v = \frac{3H_0^2(7+6\ln 11)}{80\pi G},$$

то есть $0{,}226 \times 10^{-28}$ г/см$^3$. В то же время плотность барионов — $\rho_{M0} = 10^{-31}$ г/см$^3$, следовательно $\rho_{M0}(1 + z_m)^3 = 0{,}133 \times 10^{-27}$ г/см$^3$. Значит, условие (20) выполняется для галактик с красным смещением $z = z_m = 10$.

Выше мы исходили из того, что «галактическая материя» — это барионы. Если повторить вычисления для случая темной материи, составляющей примерно 0,3 от критической плотности, то получится $\rho_{M0}(1 + z_m)^3 = 0{,}42 \times 10^{-26}$ г/см$^3$. Другими словами, и в этом случае условие (20) выполняется.

Можно убедиться, что (20) не приводит к верхнему пределу величины красного смещения, однако для темной материи существует нижний предел, который определяется условием выполнения неравенства

$$f(z) = 4 + 6\ln(1 + z) - 9z - 9z^2 - 3z^3 < 0. \tag{21}$$

Единственный вещественный корень трансцендентного уравнения $f(z) = 0$ равен $z = z_* = 0{,}4556$, а условие (21) выполняется при $z > z_*$. Переходя от величины красного смещения к переменной «время» с помощью соотношения

$$t = -\frac{\sqrt{100+60\ln(1+z)}}{3H_0},$$

находим, что в модели (13) галактики перестали образовываться совсем недавно, примерно $0{,}356/H_0 = 4{,}6 \times 10^9$ лет назад. Интересно, что в рамках данной модели образование галактик прекращается не из-за слишком большой величины космологического ускорения, а из-за чрезмерной разреженности темной материи в настоящее время.

Разумеется, выбор решения (6) в виде волновой функции основного состояния произволен и иллюстративен. Можно, например, попробовать рассмотреть интегрируемые с квадратом (лежащие в пространстве $L^2$) функции, отвечающие возбужденным состояниям. К сожалению, такие решения буквально неприменимы на всем интервале своей области определения. Действительно, в соответствии с осцилляционной теоремой волновая функция $s$-го возбужденного уровня имеет $s$ нулей. Каждый из этих нулей означает наличие космологической сингулярности, причем для положительных значений $n > 0$ масштабный фактор будет обращаться в нуль (сингулярность типа *Big Bang* или *Big Chrunch*), а если $n < 0$, то масштабный фактор будет взрываться, за конечное время приводя к сингулярности типа *Big Rip*. Разумеется, можно использовать решения для возбужденных уровней с номерами $s > 1$, ограничивая динамику определенным интервалом времени (между двумя соседними нулями). Такая вселенная будет, очевидно, начинаться и/или заканчиваться в точках сингулярности. Например, если в качестве решения (6) с «потенциалом» $U_n = \mu^2 t^2$ выбрать функцию $\psi_n \sim H_1(\mu t)\exp(-mut^2/2)$ и положить $n = -1$, то эволюция масштабного фактора в такой вселенной определится формулой



$$a(t) = \frac{a_0 t_0}{t} e^{\mu\left(t^2 - t_0^2\right)/2}. \tag{22}$$

Это простое решение описывает нетривиальную динамику вселенной: в «начальный» момент времени $t = 0$ масштабный фактор равен бесконечности (имеем сингулярность типа *Big Rip*), затем происходит сжатие вплоть до момента $t = \mu^{-1/2}$, а после начинается неограниченно долгое инфляционное расширение. Используя (7) и (8), несложно вычислить асимптотику скалярного поля и потенциала при $t \sim 0$ и $t \to \infty$. Можно убедиться в том, что кинетический член плотности энергии скалярного поля отрицателен, то есть эволюция (22) соответствует фантомному полю, что неудивительно, поскольку сингулярности типа «большой разрыв» означают наличие фантомной компоненты. Асимптотика фантома и его потенциала самодействия выглядит так:

а) $t \to 0$:

$$\phi(t) \approx \pm \frac{c}{2\sqrt{\pi G}} \ln \frac{t}{t_0},$$

$$V(\phi) \approx \frac{1}{2\pi G t_0^2} \exp(\mp \gamma \phi), \ \gamma = 4\sqrt{\pi G}/c;$$

б) $t \to \infty$:

$$\phi(t) \approx \pm \frac{c\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi G}} t,$$

$$V(\phi) \approx \frac{3\mu\phi^2}{2c^2}.$$

Решению (22) соответствует отрицательная космологическая константа $\Lambda = -9\mu/8\pi G$.

Можно рассмотреть решение вида

$$a(t) = a_0 \frac{1 - \mu t_0^2}{1 - \mu t^2} e^{\mu\left(t^{2-} - t_0^2\right)/2},$$

которое описывает вселенную, возникающую в момент времени $t = -\mu^{-1/2}$ из сингулярности *Big Rip*. Инфляция начинается в момент времени $t = 0$ и продолжается вплоть до коллапса вселенной, который имеет место при $t = \mu^{-1/2}$. Эта модель приводит к очень похожим асимптотикам фантома его и потенциала при приближении к сингулярности *Big Rip*.

($b$) В случае потенциалов типа ($b$) решение уравнения (6) для произвольного значения $m > 0$ и нулевого собственного числа $\lambda_n = 0$ имеет вид

$$\psi_n = c_1 t^{s+1/2} + c_2 t^{-s+1/2}, \tag{23}$$

где $s = \sqrt{1+4m}/2$. В зависимости от выбора параметра $n$ возникают различные варианты динамики масштабного фактора:

а) $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $n > 0$. Функция, описывающая масштабный фактор, положительна при $t > 0$ и обладает минимумом в некоторой точке $t_0 > 0$, после прохождения которого динамика описывается степенной зависимостью с выходом на асимптотический режим $a \sim t^{(2s+1)/2n}$. Инфляция возникает, если значения $m$ превышают значения $n(n-1)$;



б) $c_1 > 0$, $c_2 < 0$, $n > 0$. Эволюция начинается из точки сингулярности при $t = (-c_2/c_1)^{1/2s}$ и сразу выходит на стадию степенной инфляции при условии $m > n(n-1)$;

в) $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $n < 0$. Вселенная возникает при $t = 0$. Если $m > n(n-1)$, то имеет место фаза инфляции вплоть до определенного момента времени, после чего динамика переходит на фридмановский режим. В течение этого времени масштабный фактор достигает максимальной величины и начинает уменьшаться, асимптотически стремясь к нулю.

Изучим случай, соответствующий выбору $c_2 = 0$ и $n > 0$. Без потери общности ограничимся выбором $n = 1$. Решение имеет вид

$$a = Ct^{s+1/2},$$

где $C$ – положительная константа.

Решения для скалярного поля и потенциала в случае с положительной кривизны имеют вид

$$\phi(t) = \phi_0 \pm \frac{c\sqrt{1+2s}}{(2s-1)\sqrt{2\pi G}}\left(\frac{\sqrt{t^{2s-1}+\alpha^2}}{t^{s-1/2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{t}\sqrt{t^{2s-1}+\alpha^2}-t^s}{\sqrt{t}\sqrt{t^{2s-1}+\alpha^2}+t^s}\right)\right), \tag{24}$$

$$V = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{12s^2+8s+1}{4t^2} + \frac{(2s+1)\alpha^2}{t^{2s+1}}\right), \tag{25}$$

где $\phi_0$ — константа интегрирования; также обозначено $\alpha^2 = \dfrac{2c^2}{(2s+1)C^2}$.

Видно, что в явном виде получить зависимость $V = V(\phi)$ невозможно. Однако можно рассмотреть асимптотику для $t^{2s-1} \ll \alpha^2$ и $t^{2s-1} \gg \alpha^2$. Имеем:

а) при $t^{2s-1} \ll \alpha^2$:

$$\phi \approx \phi_0 \pm \frac{c\sqrt{1+2s}}{(2s-1)\sqrt{2\pi G}}\frac{\alpha}{t^{s-1/2}},$$

$$V(\phi) \approx \frac{c^2}{4\pi CG}\left(\frac{(2s-1)\sqrt{2\pi G}}{c(1+2s)\alpha}\right)^{\frac{4s+2}{2s-1}}\left(\pm(\phi-\phi_0)\right)^{\frac{4s+2}{2s-1}};$$

б) при $t^{2s-1} >> \alpha^2$:

$$\phi \approx \phi_0 \mp \frac{c\sqrt{2s+1}}{2\sqrt{2\pi G}} \ln \frac{t}{t_*},$$
$$V(\phi) \approx \frac{\left(12s^2+8s+1\right)t_*^2}{32\pi G} \mathrm{e}^{\mp\beta(\phi-\phi_0)},$$

где введены обозначения $t_* = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{2s-1}}$ и $\beta = \frac{4\sqrt{2\pi G}}{c\sqrt{1+2s}}$.



В плоском случае легко найти явную зависимость потенциала от скалярного поля $V = V(\phi)$:

$$\phi(t) = \pm \frac{c\sqrt{1+2s}}{2\sqrt{2\pi G}} \ln \frac{t}{t_0},$$
$$V(\phi) = \frac{\left(12s^2+8s+1\right)t_0^2}{8\pi G} \mathrm{e}^{\mp\beta\phi}.$$

Здесь $t_0$ – константа интегрирования, а $\beta$ определена в предыдущем примере.

Рассмотрим случай другого знака спектрального параметра. Пусть $\lambda_n = \xi^2 > 0$. Используя подстановку $\psi_n = \sqrt{t} f(t)$, можно свести соответствующее уравнение Шредингера для функции $\psi_n$ к уравнению Бесселя для новой функции $f(t)$. Как и раньше, рассмотрим простейший случай $n = 1$. Нас будет интересовать решение, содержащее сингулярность в начальный момент времени, который выберем за нуль, то есть $a(0) = 0$. Получаем

$$a = C\sqrt{t} J_s(\xi t), \tag{26}$$

где $J_s$ – функция Бесселя первого рода порядка $s$, а параметр $s$ связан с $\mu$ так же, как и в случае $\lambda = 0$.

Решение (26) описывает вселенную, которая начинается с сингулярности и ускоренно расширяется до момента времени $\tau = \sqrt{4s^2-1}/2\xi$. На следующем этапе масштабный фактор достигает максимума, после чего вселенная коллапсирует в финальную сингулярность.

Рассмотрим (26) для $s = 3/2$ (это означает, что $\mu = \sqrt{2}$). Как известно, функция Бесселя порядка 3/2 может быть выражена через тригонометрические функции. Обозначая $\xi t = x$, запишем решение следующим образом:

$$a = C(\sin x / x - \cos x). \tag{27}$$

Масштабный фактор достигает максимума при $x \approx 2{,}75$, финальная сингулярность наступает при $x = x_f \approx 4{,}5$.

Интересно рассмотреть асимптотическое поведение скалярного поля (как функции времени) и потенциала (как функции поля) вблизи начальной и финальной сингулярностей:

а) $x \sim 0$:

$$\phi(x) \approx \pm \frac{\sqrt{7}c}{2\sqrt{\pi G}} \ln x,$$

$$V(\phi) \approx \frac{5\lambda}{2\pi G} e^{\mp\gamma_1\phi}, \ \gamma_1 = \frac{4\sqrt{\pi G}}{\sqrt{7}c};$$

б) $x \to x_f$:

$$\phi(x) \approx \pm \frac{c}{2\sqrt{\pi G}} \ln(\sin x/x - \cos x),$$

$$V(\phi) \approx \frac{0{,}24\lambda}{\pi G} e^{\mp\gamma_2\phi}, \quad \gamma_2 = \frac{4\sqrt{\pi G}}{c}.$$



($c$) Решение для потенциала ($c$) при $\lambda_n = -\lambda^2 \le 0$ (это соответствует неотрицательному значению космологической константы) имеет вид

$$\psi_n = c_1(\lambda - \lambda_0 \, \mathrm{th}(\lambda_0 t))e^{\lambda t} + c_2(\lambda + \lambda_0 \, \mathrm{th}(\lambda_0 t))e^{-\lambda t}. \tag{28}$$

Если $\lambda = \lambda_0$, то (28) существенно упрощается:

$$\psi_n = \frac{C}{\mathrm{ch}(\lambda_0 t)}.$$

Если $n > 0$, то, как и в случае «потенциала» ($a$), получаем инфляцию на полупрямой $(-\infty, t_0)$, причем $t_0$ — точка перегиба функции $\mathrm{ch}^{1/n}(\lambda_0 t)$.

Интересный набор решений можно получить в простейшем случае нулевого собственного значения $\lambda_n = 0$:

$$\psi_n = C\mathrm{th}(\lambda_0 t). \tag{29}$$

Если $n \ge 1$, то решение описывает «рождение» вселенной в момент $t = 0$ с последующим асимптотическим переходом в стационарное состояние, причем $\ddot{a} < 0$ в течение всей эволюции. Если же n лежит в интервале $0 < n < 1$, то реализуется инфляция с естественным выходом, после чего вселенная асимптотически стремится к стационарному состоянию. Используя формулы (7) и (8), определим асимптотическое поведение скалярного поля и потенциала:

а) $t \sim 0$:

$$\phi(t) \approx \pm \frac{c}{2\sqrt{n\pi G}} \ln(\lambda_0 t/2),$$

$$V(\phi) \approx \frac{3-n}{32\pi G n^2} \lambda_0^2 \, e^{\mp\gamma_0\phi}, \ \gamma_0 = \frac{4\sqrt{\pi n G}}{c};$$

б) $\lambda_0 t >> 1$:

$$\phi(t) \approx \mp \frac{2c}{\sqrt{2n\pi G}} e^{-\lambda_0 t},$$

$$V(\phi) \approx -\frac{\lambda_0^2 \phi^2}{8c^2}.$$

В случае $\lambda > \lambda_0$, $c_1 > 0$, $c_2 = 0$ имеется решение

$$\psi_n = c_1(\lambda - \lambda_0 \operatorname{th}(\lambda_0 t))e^{\lambda t},$$

$$a = c_1^{1/n}(\lambda - \lambda_0 \operatorname{th}(\lambda_0 t))^{1/n} e^{\lambda t/n}. \qquad (30)$$

Такое всюду регулярное решение достаточно необычно, потому что может описывать две последовательные инфляции. Можно показать, что при определенных значениях параметров $\lambda_0$, $\lambda$ и $n$ (30) демонстрирует вселенную, испытывающую стадию инфляции на некотором конечном интервале $(0, t_1)$. После этого реализуется выход из стадии инфляционного расширения, но начиная с некоторого момента времени $t_2 > t_1$ вселенная вновь оказывается в режиме инфляции. Чтобы конкретизировать условия, при которых реализуется такая ситуация, рассмотрим $\ddot{a}$ в начальный момент времени, соответствующий $t = 0$. Используя (30), находим



$$\ddot{a}(0) \sim (1-n)y^4 - 2y^2 + 1,$$

где введено обозначение $y = \lambda_0/\lambda < 1$. Значит, вторая производная в нулевой момент времени будет неотрицательной, если выполняется условие

$$0 < y^2 \le y_0^2 = \frac{1-\sqrt{n}}{1-n}.$$

Дальнейшее рассмотрение этого вопроса приводит к заключению, что в случае $n \ge 1$ вселенная сразу выходит на стадию инфляционного расширения. Если $y^2 > y_0^2$, то решение (30) демонстрирует появление инфляции начиная с определенного момента времени $t_0 > 0$. Если $n < 1$, то в достаточно узком интервале значений $y_0^2 - \Delta < y^2 < y_0^2$, $\Delta << y_0^2$ имеет место быть область расширения с отрицательным ускорением, но после этого вселенная вновь становится инфляционной. Скажем, при $n = 0{,}25$, $\lambda_0 = 0{,}8\lambda$ вселенная расширяется с ускорением в течение конечного интервала времени $(0, 0{,}08/\lambda)$, затем следует конечная область степенного расширения с длительностью порядка $0{,}4/\lambda$. На временах $t > 5/\lambda$ масштабный фактор уже меняется фактически по деситтеровскому закону $a \sim e^{4\lambda t}$.

Заключая этот раздел, вычислим асимптотическое поведение потенциала скалярного поля на самой ранней стадии. Используя (7), (8) и ограничиваясь точностью до первого порядка (по времени), находим при $t << 1/\lambda$:

$$\phi(t) \approx \phi_0 \pm \frac{cy^2}{2\sqrt{n\pi G}}\lambda t,$$

$$U(t) \approx \frac{\lambda^2}{8\pi G}\left(\frac{3-n}{n^2}y^4 - \frac{6}{n^2}y^2 - \frac{2(3-n)}{n^2}y^4(1-y^2)\lambda t\right).$$

Как мы видим, если «первичная инфляция» реализуется, то она соответствует режиму медленного скатывания (что естественно), а сам потенциал медленно падает по линейному закону.

## 3. Космологические модели без горизонтов событий

### 3.1. Метод



Сейчас мы продемонстрируем, что изученный выше метод позволяет строить при $n=1$ космологические модели, не содержащие горизонтов событий.

Очевидно, при $n=1$ уравнение (5) совпадает с (4). Пусть $a(t)$ — некоторое известное решение (4). Будем метить «крышечкой» второе, линейно независимое решение с тем же потенциалом — $\hat{a}(t)=v(t)a(t)$, причем

$$v(t)=\int^{t}\frac{dt'}{a^2(t')}.$$

Значит, общее решение (4), которое мы обозначим $A(t)$, имеет вид

$$A(t) = a(t)[C_1 + C_2 v(t)], \tag{31}$$

где $C_{1,2}$ — две произвольные константы.

Такие функции являются двухпараметрическими обобщениями исходных решений (случай $C_2 = 0$ возвращает нас к исходному решению). На втором шаге подставим (31) в (3) и вычислим плотность энергии в такой двухпараметрической модели. Поскольку при всех этих преобразованиях величина $\rho+\frac{3p}{c^2}$ не меняется (помним, что это функция времени)[5], легко найти давление $p=p(t)$ и окончательно получить обобщенное уравнение состояния.

Пусть момент времени $t_f$ является нулем функции (31), причем будем предполагать, что $t_f$ не является нулем исходной функции $a(t)$: $a(t_f) \equiv a_f \neq 0$. Тогда

$$v(t_f)\equiv v_f=-\frac{C_1}{C_2}.$$

В эпсилон-окрестности точки $t_f$ ($t = t_f - \varepsilon$ при $\varepsilon \sim O(1)$) имеем простое соотношение (используем обозначения $A_f = A(t_f)$, $\dot{A}_f=\dot{A}(t)$ при $t = t_f$):

$$A(t)\sim A_f-\varepsilon\dot{A}_f=-(t_f-t)\dot{A}_f=-(t_f-t)\left(\dot{a}_f(C_1+C_2v_f)+C_2a_f\dot{v}_f\right)=\frac{C_{2a_f}}{a_f}(t-t_f). \tag{32}$$

Поскольку линейный элемент имеет вид

$$ds^2=c^2dt^2-A^2(t)\left[dr^2+F^2(r)d\Omega_2^2\right], \tag{33}$$

для направленных в будущее нулевых радиальных геодезических получаем

$$\Delta r=\int\limits_{t_f-\varepsilon}^{t_f}\frac{cdt}{A(t)}=\frac{ca_f}{C_2}\int\limits_{t_f-\varepsilon}^{t_f}\frac{dt}{t-t_f}=-\infty\times\operatorname{sgn}\left(\frac{a_f}{C_2}\right). \tag{34}$$

[5] Важно отметить, что если в исходной модели выполнялось сильное энергетическое условие, то оно выполняется и в новой.

Отсюда следует, что если $\mathrm{sgn}(a_f/C_2) = -1$, то $\Delta r = +\infty$: нулевые геодезические совершают бесконечно много «оборотов-осцилляций» (в замкнутой вселенной) и лишь потом попадают в финальную сингулярность при $t = t_f$. Поскольку вселенная с линейным элементом (33) однородна и изотропна, можно доказать, что единственной сингулярностью будущего будет c-граница в виде точки, достигаемой при $t = t_f$. Значит, такое пространство-время не содержит горизонтов в будущем. Кроме того, параметр уравнения состояния $w = p/(\rho c^2) \to -1/3$ при $t \to t_f$. То, что параметр оказывается отрицательным, — хорошо известный факт, следующий из анализа динамики коллапсирующих вселенных с использованием глобальных методов.

Если вселенная заполнена скалярным полем $\phi$ с потенциалом $V(\phi)$ и минимальной связью (причем вклад $\phi$ в полный тензор энергии-импульса материи является доминирующим при $t \to t_f$), то можно показать, что в окрестности точки финальной сингулярности $t = t_f$ выполняются следующие соотношения:

$$\phi = \phi(0) + \frac{1}{\nu}\ln\left(1 - \frac{t}{t_f}\right),$$

$$V(\phi) = \frac{1}{c^2\nu^2 t_f^2}\mathrm{e}^{-2\nu(\phi-\phi(0))},$$

где

$$\nu = \pm\frac{2\mu^2\sqrt{\pi G}}{c\sqrt{\mu^4 + kc^2}}, \quad \mu^2 = -\frac{C_2}{a_f}.$$

Очевидно, при $t \to t_f$ выполняется $\nu\phi \to -\infty$, а значит, $V \to +\infty$.

Будем считать, что масштабный фактор $a(t)$ обращается в нуль в некоторый момент времени, предшествующий $t_f$. Не теряя общности, выберем этот момент за $t = 0$. Нас будет интересовать случай вселенной, возникающей из начальной сингулярности при $t = 0$ и заканчивающей существование в финальной сингулярности при $t = t_f$. Это имеет место быть при условии регулярности выражения $a(t)v(t)$ при $t \to 0$. Сделаем два дополнительных предположения: ($i$) при достаточно малых положительных значениях времени $t$ работает баротропное уравнение состояния $p = wc^2\rho$; ($ii$) выполняется слабое энергетическое условие или условие энергодоминантности $w > -1$. Тогда выражение $a(t)v(t)$ остается регулярным при $t \to 0$, если $w > -1/3$ (например, модель вселенной, заполненной барионным веществом ($w = 0$) или электромагнитным излучением ($w = 1/3$)). В случае $w > 1/3$ при $t \to 0$ в (31) преобладает первое слагаемое, а если $-1/3 < w < 1/3$, то второе. Например, если начинать нашу процедуру со вселенной, заполненной холодным веществом (барионами или темной материей), то общее решение при $t \to 0$ будет вести себя как $A \sim t^{1/3}$, то есть описывать динамику вселенной, в которой на начальной стадии доминирует материя с так называемым предельно жестким уравнением состояния $w = 1$, а не с уравнением состояния пылевой материи с $w = 0$.

### 3.2. Условие самосогласованности и пространство-время без горизонтов

На этом этапе может возникнуть вопрос, почему мы акцентируем внимание на моделях вселенных без горизонтов событий и демонстрирующих смену расширения на режим сжатия с коллапсом в финальную сингулярность? Ответ: эти модели удовлетворяют «условию самосогласованности». Поясним этот момент.

Традиционно для космологии считать, что обнаружение каких-либо несогласованностей, возникающих при сравнении известных физических закономерностей с данными космологических наблюдений, свидетельствует о существовании пока не открытых фундаментальных принципов. Скажем, необходимость чрезвычайно тонкой настройки начальных условий в ранней фридмановской космологии рассматривалась как свидетельство того, что традиционная физика просто неприменима вблизи космологической сингулярности. Аналогично выглядела проблема однородности и изотропности реликтового фона. Позднее все эти проблемы были успешно разрешены в рамках инфляционной парадигмы (включая объяснение происхождения крупномасштабной структуры).

Тем не менее можно предложить другой, значительно менее принятый подход, а именно считать основные физические закономерности уже заданными и использовать упомянутые несогласованности для отбора космологических моделей, свободных от этих несогласованностей. Выразимся яснее: принцип самосогласованности означает, что глобальная геометрия пространства-времени определяется не только распределением вещества, но и отсутствием несогласованностей, отсутствием нестыковок, возникающих при применении различных физических методов для описания космологических процессов. При этом изучение глобальной эволюции вселенной становится принципиально важным просто потому, что если динамика вселенной происходит согласованно в течение какого-то времени, нет гарантий, что несогласованности не проявятся позднее. Например, с точки зрения квантовой теории поля фантомы оказываются полями с отрицательными кинетическими членами, что приводит (на квантовом уровне) к потере унитарности. Вместе с тем, как мы показали выше, даже если фантомов не существует в начальный момент времени, они вполне могут появиться динамически. Значит, если исследования покажут, что фантомы действительно несовместимы с теорией поля, следует наложить на динамику вселенной условие, препятствующее их образованию в будущем. Важно отметить, что, по-видимому, почти все пространство-время вселенной лежит в будущем относительно текущего момента, поэтому изучение глобальной эволюции означает главным образом *изучение будущего*.

О каких еще несогласованностях (кроме фантомов) идет речь? Данные, полученные при наблюдениях над удаленными сверхновыми типа Ia, которые являются «стандартными свечами», показали, что вселенная испытывает ускоренное расширение [8; 9]. В рамках применимости уравнений Эйнштейна и выполнения слабого энергетического условия следует предположить наличие материи особого вида (темная энергия), которая может представлять собой или скалярное поле неизвестной природы (квинтэссенция), или космологическую постоянную, или комбинацию этих двух объектов. Измерение параметра адиабатичности довольно уверенно свидетельствует о втором варианте [10].

В этом случае мы наблюдаем процесс смены динамического закона расширения от фридмановского (степенного) к деситтеровскому (экспоненциальному). В случае точной вселенной де Ситтера (dS) вся будущая эволюция наблюдаемой вселенной должна быть ограничена горизонтом событий $R_h = c/H$ (напомним, что $H$ — параметр Хаббла, который в dS-вселенной является постоянным). Этот факт влечет за собой ряд крайне сложных проблем в совершенно неожиданной области. К примеру, активно обсуждается вопрос о том, как формулировать фундаментальную теорию (теорию суперструн / M-теорию) в конечном объеме [11—13]. Дело в том, что традиционный аппарат квантовой теории поля основан на формализме S-матрицы, а S-матрица, как представляется, не может быть математически корректно определена в этой ситуации. Очень вероятно, что непротиворечивое описание появляется лишь при $R_h = \infty$. Таким образом, появляется пример несогласованности между космологией и теорией поля.

Остроумный выход (в духе определения согласованной модели) был предложен в [14]. Автор пришел к заключению, что темная энергия должна не быть космологической постоянной, а реализовываться в рамках моделей с «голографической» фантомной энергией. Отталкиваясь от модели, описанной в [15], ученый показал, что вполне возможны ситуации, когда $R_h = \infty$. Другими словами, голографическая фантомная энергия (но весьма специального вида) оказывается более предпочтительным кандидатом на роль темной энергии с позиций возможности непротиворечивой формулировки фундаментальной M-теории. Это прекрасный пример, иллюстрирующий смысл введенного нами выше условия согласованности или самосогласованности.

Однако фантомы выглядят (по крайней мере, пока) слишком экзотически, чтобы так легко сделать вывод об их существовании, поэтому разумно оставить голографический фантомный сценарий на «черный день» и поискать другие модели. Очевидно, кандидатом (разумеется, если мы принимаем принцип согласованности) остается только квинтэссенция. Приведем еще один аргумент против космологической постоянной: неограниченное расширение вселенной приводит к парадоксальному выводу, впервые отмеченному в работе [16]. Оказывается, если возраст деситтеровской вселенной с современным темпом расширения превысит $T = 10^{60}$ лет, то в такой вселенной *на протяжении всей ее бесконечной эволюции* будут доминировать так называемые больцмановские мозги, а не обычные наблюдатели. Можно было бы сделать вывод, что вселенная должна существовать конечное время. Собственно, теория струн предсказывает конечное время жизни, связанное с тем, что состояние «нашего вакуума» метастабильно. Однако приведенная выше [16] оценка максимального времени жизни вселенной чрезвычайно отличается от оценки времени жизни $\tau$ метастабильной деситтеровской фазы. Согласно исследованиям [17; 18], эта величина имеет характерный порядок $\tau < e^{0,5\times 10^{123}}$ лет. В некоторых моделях это число удается существенно понизить до $e^{10^{19}}$ и даже до $e^{10^{9}}$ лет (например, в модели, содержащей KPV-инстантоны [19]), но и в этом случае время жизни вселенной чудовищно больше, чем $10^{60}$! Аналогичные трудности будут, видимо, возникать и в фантомных моделях, для которых $R_h = \infty$[6]. Мы заключаем, что эти результаты могут служить веским аргументом против моделей вселенных с вечным расширением. Отсюда следует, что более предпочтительными являются сценарии, в которых современная фаза расширения должна смениться на фазу сжатия с последующим коллапсом, причем время жизни вселенной не должно превышать предельных значений, полученных в [16]. Таким образом, наиболее привлекательными представляются модели, для которых выполняются два условия: (*i*) вселенная оканчивает свое существование в финальной сингулярности на стадии коллапса; (*ii*) вселенные не содержат горизонта событий $R_h < \infty$. В дальнейшем *будем называть согласованными в будущем* (пишется без кавычек) *или просто «согласованными»* (пишется в кавычках) *космологические модели, удовлетворяющие этим двум условиям*. Это означает, в частности, что темная энергия должна быть квинтэссенцией, а не космологической постоянной.

Необходимо отметить чрезвычайно важное обстоятельство: во вселенной, заполненной веществом, для которого выполняются все энергетические условия, приближение к финальной сингулярности будет иметь осцилляторно-хаотический характер. В наиболее интересной и изученной модели — Бианки-IX — сжатие демонстрирует постоянные смены «казнеровских эпох», причем характер этих смен быстро приобретает стохастическое поведение[7]. В таком режиме главный вклад вносят зависящие от пространственной кривизны члены, отвечающие плотности энергии, убывающей как шестая степень $a^6$, поэтому при $a \to 0$ имеем бесконечное число смен «казнеровских эпох» вплоть до достижения вселенной точки финальной сингулярности. Это приводит к существенному осложнению: в этих условиях вероятность случайной реализации вселенной с единственной с-границей в виде точки (неизбежное следствие условия отсутствия горизонтов) оказывается пренебрежимо малой величиной. Вместе с тем эти выводы кардинально меняются при наличии безмассового скалярного поля (например, дилатона), в присутствии которого колебательный режим приближения к сингулярности сменяется монотонным. Значит, принцип согласованности в будущем *требует* наличия переменного безмассового скаляр-

[6] Интересно отметить, что парадокс из [16] не появляется в фантомных космологических моделях общего вида, в которых $R_h \to 0$ при неограниченном росте масштабного фактора [20]. Однако эти модели нас не интересуют по вышеизложенной причине.

[7] В течение каждой эпохи расстояния вдоль двух осей осциллируют, а расстояние вдоль третьей монотонно уменьшается.

ного поля. При этом условие отсутствия горизонтов в замкнутой вселенной выполняется, если при приближении к сингулярности параметр $w \geq -1/3$.

Это замечательный вывод! Мы можем заключить, что описанный в разделе 3.1 математический подход построения точных решений космологических уравнений Эйнштейна — Фридмана приобретает весьма глубокий смысл, поскольку в общем случае он дает решения, обладающие именно таким поведением, которое требуется для выполнения «условий согласованности». Ниже, в разделах 3.3—3.6 мы продемонстрируем конкретные примеры таких решений.

В качестве начальных (затравочных) решений будем выбирать масштабные факторы, соответствующие различным значениям параметра уравнения состояния $w$ и кривизны $k$. Наиболее интересны и физически осмысленны ситуации, когда исходное решение соответствует барионному веществу и излучению. Для таких моделей сильное энергетическое условие, очевидно, всегда выполнено, а значит, как мы уже отмечали, оно будет автоматически выполняться и для их двухпараметрических обобщений. Для пространств с положительной и нулевой кривизной это приводит к выполнению и условия энергодоминантности, поэтому в дальнейшем мы не будем подробно исследовать слабое энергетическое условие. Удобно ввести следующие обозначения: если в качестве затравочного решения берется решение уравнений (3), (4) для пыли или/и излучения, то построенную по описанной схеме модель будем называть B-, R- или BR-моделью соответственно.

### 3.3. B-модели

Для вещества $w = 0$, и уравнения (3), (4) принимают следующий вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi GC}{3a^3} - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{35}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi GC}{3a^3}, \tag{36}$$

где $C$ — положительная константа.

*Замкнутое пространство*

В случае положительной кривизны ($k = 1$) решения уравнений (35) и (36) имеют вид

$$a = \chi^2 \sin^2\theta, \tag{37}$$

$$t = \frac{\chi^2}{2c}(2\theta - \sin 2\theta), \tag{38}$$

где $\chi = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{8\pi GC}{3}}$ — константа. Опуская численные коэффициенты, приведем линейно независимое решение:

$$\hat{a} \sim \sin^2\theta \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta} \sim \sin\theta\cos\theta \, .$$

Отсюда находим общее двухпараметрическое решение:

$$A = \chi^2 \sin\theta \sin(\delta - \theta), \tag{39}$$

где константа $\delta$ удовлетворяет условию $0 < \delta \le \pi$. Вторая константа входит мультипликативным образом, перенормируя величину $\chi$, и может быть поглощена за счет переопределения $C$. Параметр $\theta$ в решении (39) связан со временем по формуле (38). Заметим, что положив в уравнении (39) $\delta = \pi$, мы придем к (37). Масштабный фактор достигает максимума $A_{\max} = \chi^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ при $t_{\max} = \frac{\chi^2}{4c}(\delta - \sin\delta)$. В момент времени

$$t_f = \frac{\chi^2}{2c}(2\delta - \sin 2\delta)$$

масштабный фактор обращается в нуль. Поучительно вычислить долю времени от полного времени своего существования, в которой вселенная расширяется $\gamma = t_{max}/t_f$. Получаем

$$\gamma = \frac{\delta - \sin\delta}{2\delta - \sin 2\delta}. \tag{40}$$

При малых $\delta \to 0$ вселенная расширяется приблизительно $^1/_8$ часть своей жизни. При $\delta \to \pi$ получаем 50 % ($\gamma = ½$). Величины плотности $\rho$ и давления $p$ в параметрическом виде:

$$\rho = \frac{C}{\chi^6 \sin^6\theta} \frac{4\sin^4\theta + \sin^2(\delta - 2\theta)}{4\sin^2(\delta - \theta)},$$

$$p = \frac{c^2 C}{3\chi^6 \sin^6\theta}\left(1 - \frac{4\sin^4\theta + \sin^2(\delta - 2\theta)}{4\sin^2(\delta - \theta)}\right).$$

Параметр уравнения состояния меняется следующим образом: в окрестности начальной сингулярности $w \sim 1$, а при приближении к финальной сингулярности (как и должно быть) $w \sim -1/3$.

На этом примере покажем, что пространство-время действительно не содержит горизонтов. Рассмотрим распространение светового луча в B-модели для случая замкнутого пространства. Простоты ради выберем радиальную изотропную геодезическую

$$ds^2 = c^2 dt^2 - A(t)^2 dr^2 = 0.$$

Расстояние, которое луч света пройдет за время $t$:

$$r = c\int_0^t \frac{dt}{A}.$$

Соответствующий путь, который луч успевает пройти за все время (конечное) жизни вселенной, равен

$$r = 2\int_0^\delta d\theta \frac{\sin\theta}{\sin(\delta - \theta)} = -2\left(\theta\cos\delta + \sin\delta \ln\sin(\delta - \theta)\right)\Big|_0^\delta.$$

Таким образом, при $\delta=\pi$ длина пути конечна, но это специальный случай, поскольку для всех остальных $\delta\neq\pi$ интеграл расходится. В этом, по сути, общем случае светоподобные геодезические огибают вселенную бесконечное число раз, вплоть до коллапса вселенной. Из-за высокой симметрии (изотропности и однородности) модели всегда можно выбрать координатную систему таким образом, чтобы две произвольные пространственные точки были соединены посредством пространственного сегмента изотропной геодезической. Это означает, что все бесконечные временимподобные кривые определяют одну и ту же с-границу, которая представляет собой точку, и горизонты событий отсутствуют.



*Открытое пространство*

Необычно, что в открытых моделях с $k=-1$ существуют решения с финальной сингулярностью. Действуя по схеме, описанной в 3.1, получаем в параметрическом виде решение уравнений (35) и (36):

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon\chi^2 \operatorname{sh}\theta \operatorname{sh}(\delta-\theta), \\ t &= \frac{\chi^2}{2c}(\operatorname{sh}\theta-2\theta), \end{aligned} \qquad (41)$$

причем параметр $\varepsilon=1$ при $\delta>0$ и $\varepsilon=-1$ при $\delta=0$. В последнем случае получаем известную открытую фридмановскую модель. Если параметр $\delta$ достаточно велик, то большая часть времени существования вселенная переживает стадию коллапса. Уравнение состояния:

$$w=\frac{p}{\rho c^2}=\frac{1}{3}\left(-1+\frac{4\operatorname{sh}^2(\delta-\theta)}{\operatorname{sh}^2(\delta-2\theta)-4\operatorname{sh}^4\theta}\right). \qquad (42)$$

Из (42) следует картина, аналогичная случаю пространства с положительной кривизной, а именно: $w\to 1$ при $t\to 0$ и $w\to -1/3$ при $t\to t_f$. В некоторый момент времени, предшествующий достижению максимального значения масштабного фактора, параметр $w$ терпит разрыв, поскольку в нуль обращаются плотности энергии $\rho$. Горизонты событий в такой вселенной тоже отсутствуют, в чем легко убедиться, вычислив путь луча света вдоль радиальной геодезической.

*Плоское пространство*

Это самый простой случай, для которого решение выписываются явно:

$$A=(3\chi ct/2)^{2/3}((t_f/t)^{1/3}-1), \qquad (43)$$

$$w=-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{t_f^{1/3}-t^{1/3}}{t_f^{1/3}-2t^{1/3}}\right)^2. \qquad (44)$$

Из (43) следует, что в момент времени $t_{max}=t_f/8$ значение масштабного фактора достигает максимального значения и в этот же самый момент параметр $w$ обращается в бесконечность (см. (44)).

Поведение параметра уравнения состояния тоже неоригинально: в начальный момент времени $w=1$, а в финальной сингулярности $w=-1/3$.

Несложно понять, что обращение функции $w$ в бесконечность будет общим свойством всех моделей, для которых кривизна пространства равна нулю или отрицательна и для которых существует финальная сингулярность, поэтому ниже мы специально это не оговариваем.

### 3.4. R-модели



Для излучения $w=1/3$, и уравнения (3), (4) принимают следующий вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi GC}{3a^4}-\frac{kc^2}{a^2}, \tag{45}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{C}{a^4}+\frac{3p}{c^2}\right), \tag{46}$$

где $C$ – положительная константа. Для удобства мы использовали те же самые обозначения, что применялись в разделе 3.3, несмотря на то, что размерности этих констант различны. Как и раньше, последовательно рассмотрим три случая: $k=1,-1,0$.

*Замкнутое пространство*

В случае положительной кривизны ($k=1$) общее решение системы (45) и (46) в параметрическом виде имеет следующий вид:

$$A=\frac{x}{\sin\theta}\left(1-\alpha\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),\quad 1-\cos\theta=\frac{ct}{\chi}, \tag{47}$$

где $\alpha$ (здесь и далее) – положительная константа. Конечная, на стадии сжатия, сингулярность возникает в момент времени

$$t=t_f=\frac{2\chi}{c}\frac{\exp(2/\alpha)}{1+\exp(2/\alpha)},$$

а параметр уравнения состояния

$$w=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{\left(1-\alpha\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(\cos\theta\left(1-\alpha\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\alpha\right)\right)^2}$$

ведет себя так: на ранних временах (малые $\theta$) $w\to 1/3$, то есть во вселенной доминирует излучение, затем $w$ в определенный момент времени обращается в нуль и наконец достигает значения –1/3 в финальной сингулярности. Путь луча света вдоль радиальной геодезической за время существования вселенной равен

$$r = \int_0^{2\,\mathrm{arctg}(\exp(1/\alpha))} \frac{d\theta}{1-\alpha\ln\dfrac{\theta}{2}} = +\infty\,.$$

Вновь убеждаемся, что горизонты отсутствуют.

*Открытое пространство*



Случай $k=-1$ наиболее богат и интересен. Дело в том, что из него можно получить по крайней мере три класса решений, в том числе и стационарное. Все эти решения не содержат горизонтов событий и потому относятся к классу «согласованных». Стартовое решение уравнений (45) и (46) для $k=-1$ имеет вид

$$a = \chi\,\mathrm{sh}\,\theta,\ \mathrm{ch}\,\theta - 1 = \frac{ct}{\chi}\,. \tag{48}$$

Линейно независимое решение $\hat{a}$ находится по (48) следующим образом:

$$\hat{a} \sim \mathrm{sh}\,\theta\int\frac{d\theta}{\mathrm{sh}\,\theta} = \mathrm{sh}\,\theta\ln\mathrm{th}\frac{\theta}{2}\,.$$

Общее решение:

$$A = \chi\,\mathrm{sh}\,\theta\ln\frac{\mathrm{cth}^{\varepsilon}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\alpha},\ \mathrm{ch}\,\theta - 1 = \frac{ct}{\chi}\,. \tag{49}$$

Без потери общности можно считать, что $\varepsilon = 0$ для исходного решения и $\varepsilon = 1$ во всех остальных случаях, к рассмотрению которых мы и переходим.

## Сингулярные R-модели в открытом пространстве

Таким решениям соответствуют значения $\alpha$, превышающие единицу. В момент времени

$$t_f = \frac{2\chi}{c}\frac{1}{\alpha^2 - 1}$$

масштабный фактор обращается в нуль, а при приближении к финальной сингулярности параметр $w \to -1/3$.

## R-модели с вечным расширением

При $\alpha < 1$ вселенная вечно расширяется. При больших $t$ масштабный фактор растет линейно со временем:

$$A \cong -\ln(\alpha)ct.$$

Линейность расширения указывает, что $w$ асимптотически стремится к – 1/3. Очевидно, горизонт событий отсутствует, так как путь света вдоль радиальной геодезической

$$r=\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{\ln\left(\dfrac{\operatorname{cth}\frac{\theta}{2}}{\alpha}\right)}$$

стремится к бесконечности, поскольку при больших величинах $\theta$ подынтегральное выражение стремится к постоянной величине.



### Стационарная R-модель

Положив в (49) $\alpha=1$, получим, что при $t\to\infty$ $A\to\chi$, то есть имеем стационарное решение. Любопытно, что, как и в случае открытых решений, на больших временах $w\to-1/3$. В самом деле, при $t\to\infty$ $\rho\to-\dfrac{c}{\chi^4}$, а $p\to\dfrac{c^2C}{3\chi^4}$. Горизонт событий также отсутствует (расчет аналогичен случаю открытого решения).

*Плоское пространство*

Случай нулевой кривизны как всегда наиболее прост для анализа. Решение для масштабного фактора записывается в виде

$$A=\sqrt{2\chi ct}\left(1-\alpha\ln\frac{t}{t_0}\right),\tag{50}$$

где $t_0$ — константа, введенная из соображений размерности. Без потери общности можно принять $\alpha=1$, так как качественно это не меняет поведение решения. Момент времени $t_{max}$, когда масштабный фактор имеет наибольшее значение, и время достижения финальной сингулярности $t_f$ связаны простым соотношением

$$t_{max}=\exp(-2)t_f,$$

из которого следует, что в фазе расширения вселенная проводит порядка $1/7$ части своего существования. Горизонт событий отсутствует.

### *3.5. BR-модели в плоском пространстве*

Теперь рассмотрим случай, когда в качестве исходного взято решение, описывающее плоскую вселенную, заполненную и излучением, и веществом:

$$\begin{aligned}a&=\frac{C}{\rho_1}\operatorname{sh}^2\theta,\\ \operatorname{ch}\theta\left(\operatorname{ch}^2\theta/3-1\right)&=\frac{C}{\rho_1}\chi ct.\end{aligned}\tag{51}$$

При получении решения (51) мы полагали, что плотность энергии вещества меняется как $\rho_D = \rho_1/a^3$, где $\rho_1$ — константа, а излучения $\rho_R = C/a^4$. Применив нашу схему, находим общее решение для данного $\rho + 3p/c^2$ в виде

$$A = \frac{C}{\rho_1}\mathrm{sh}^2\theta \ln\frac{\mathrm{cth}^{\varepsilon}\frac{\theta}{2}}{\alpha}, \tag{52}$$

причем время связано с параметром $\theta$, как и в решении (51). При $\varepsilon = 0$ получаем исходное, затравочное решение, а в остальных случаях без потери общности можно положить $\varepsilon = 1$. Вновь видим, что имеется три класса таких решений.



### BR-модели с асимптотикой $t^{2/3}$

В этом случае $\alpha < 1$. На достаточно больших временах асимптотическое поведение масштабного фактора имеет вид

$$A \to \ln\alpha \frac{C}{\rho_1}\mathrm{sh}^2\theta \sim t^{2/3}.$$

Для простоты мы опустили все несущественные численные коэффициенты. С точностью до констант асимптотика (52) при $\alpha < 1$ совпадает с асимптотикой (51). Отличие между решениями проявляется лишь на начальном этапе, когда существенен логарифмический множитель.

### BR-модель с асимптотикой $t^{1/3}$

В этом случае $\alpha = 1$, $A \to 2C\rho_1\,\mathrm{sh}\,\theta/\rho_1 \sim t^{1/3}$ при $t \to \infty$.

Интересное поведение в этих двух моделях имеет функция $w$. В самом начале $w \to 1/3$, затем увеличивается, а потом уменьшается до 0 для первого случая и до 1 во втором случае. Заметим, что горизонты событий в этих двух моделях отсутствуют, так как путь луча света вдоль геодезической за бесконечное время стремится к бесконечности:

$$r \sim \int_0^\infty d\theta \frac{\mathrm{sh}\,\theta}{\ln\mathrm{cth}\frac{\theta}{2} - \ln\alpha} = \infty.$$

Однако в данном случае это не так важно с точки зрения «согласованных» моделей, поскольку в затравочной модели горизонты событий уже отсутствовали.

### Сингулярные BR-модели

Для $\alpha > 1$ решение будет заканчиваться сингулярностью. Нетрудно убедиться, что горизонт событий в таких моделях будет отсутствовать.

### 3.6. Λ-модели

Особый интерес представляют модели, построенные на стартовых решениях, содержащих ненулевой Λ-член ($w = -1$). Ниже мы представим общую схему задачи и рассмотрим один частный случай.

Пусть вселенная с ненулевой вакуумной энергией Λ заполнена еще и «материей», плотность которой $\rho_E$ убывает по степенному закону:

$$\rho_E = \frac{C}{a_n},$$



где $n$ — произвольное положительное число. Уравнения (3) и (4) принимают вид

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{C}{a_n} + \Lambda\right) - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{53}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{(n-2)C}{a^n} - 2\Lambda\right). \tag{54}$$

Исследование системы уравнений (53) и (54) в общем виде довольно сложно, однако в ряде случаев удается найти достаточно простые решения. Например, для случая $n = 4$ (излучение) плоского пространства $k = 0$ и положительной вакуумной энергии затравочное решение имеет вид

$$a = \left(\frac{C}{\Lambda}\right)^{1/4} \mathrm{sh}^{1/2}\,\theta,\ \theta = 2\sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}\,t. \tag{55}$$

«Потенциал» в такой модели равен

$$U = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) = \frac{8\pi G}{3}\Lambda\left(1 - \frac{1}{\mathrm{sh}^2\,\theta}\right),$$

то есть при $t > t_v = \sqrt{\dfrac{3}{32\pi G\Lambda}}\arcsin 1$ нарушается сильное энергетическое условие. Общее решение для такого потенциала:

$$A = \left(\frac{C}{\Lambda}\right)^{1/4} \mathrm{sh}^{1/2}\,\theta \ln\frac{\mathrm{cth}^{\varepsilon}\,\frac{\theta}{2}}{\alpha}, \tag{56}$$

где, как и ранее, мы ввели параметр $\varepsilon$, нулевое значение которого дает нам исходное решение и который во всех остальных случаях можно полагать равным единице. Нетрудно заметить, что в последнем случае имеется три класса решений. При $\alpha < 1$ вселенная открыта и на больших временах расширяется по экспоненциальному закону. Разумеется, в такой модели есть и горизонт событий.

Случай $\alpha \geq 1$ более интересен. Если строго $\alpha > 1$, то в момент времени $t_f = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\Lambda}} \operatorname{arccth}\alpha$ имеем конечную сингулярность. Любопытно отметить, что при $a \geq 1+\sqrt{2}$ сильное энергетическое условие не нарушается (вселенная успевает сколлапсировать раньше момента времени $t_v$).

Когда $\alpha = 1$, получающееся решение можно назвать квазисингулярным, так как

$$\lim_{t>>0} A \sim \lim_{\theta>>0} \mathrm{sh}^{1/2} \ln \mathrm{cth}\frac{\theta}{2} \sim \exp(-\theta/2).$$



Значит, сингулярность достигается лишь асимптотически.

И в сингулярной, и квазисингулярной моделях горизонты событий отсутствуют. Действительно, для квазисингулярной вселенной путь светового луча вдоль радиальной геодезической

$$r \sim \int_0^\infty \frac{d\theta}{\mathrm{sh}^{1/2}\theta \ln \mathrm{cth}\frac{\theta}{2}}.$$

Этот интеграл расходится, поскольку на верхнем пределе подынтегральное выражение имеет экспоненциальное асимптотическое поведение. Аналогично доказывается отсутствие горизонтов и для сингулярной модели.

Наконец, вычислим уравнение состояния:

$$w = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\left(1-\mathrm{sh}^2\theta\right)\ln^2\frac{\mathrm{cth}\frac{\theta}{2}}{2}}{\left(\mathrm{ch}\,\theta \ln\frac{\mathrm{cth}\frac{\theta}{2}}{\alpha} - 2\right)^2}.$$

Анализируя это соотношение, получаем, что и для открытой, и для квазисингулярной моделей вселенная стремится к режиму dS ($w \to -1$) с ростом $t$. Финальная сингулярность соответствует $w = -1/3$, а начальная (для всех моделей) — радиационно-доминированной вселенной с $w = 1/3$.

**Замечание 3**. Разумеется, все приведенные решения являются только модельными хотя бы потому, что они не содержат инфляционной стадии (ни быстрой, ни медленной). Однако можно использовать метод, описанный в [1], вводя (разумеется, вручную) слабую температурную зависимость параметров. Например, если допустить, что $\alpha = \alpha(T)$ в (56) (причем модуль $a$ возрастает при убывании температуры ($T \to 0$)), то в будущем вселенная, находящаяся сейчас на стадии ускоренного расширения ($\alpha < 1$), может сколлапсировать (если параметр вырастет так, что будет выполняться неравенство $\alpha > 1$, то коллапс становится неизбежным) в финальную сингулярность, причем горизонт событий будет отсутствовать.

**Замечание 4**. Использование условия согласованности в будущем выглядит очень необычно. Традиционный физический подход подразумевает, что какие-либо предсказания делаются с использованием уравнений движения и начальных условий. Условие же «согласованности», анонсированное в данной работе, кажется парадоксальным, поскольку основано главным образом на различных предположениях о будущей эволюции вселенной. С нашей точки зрения мы имеем дело не с логически противоречивой, а просто с непривычной ситуацией. Более того, такого рода обстоятельства не являются чем-то совершенно новым в физике.



Скажем, знаменитая проблема «убегающих решений» в классической электродинамике, связанная с учетом сил радиационного трения, решается наложением дополнительных граничных условий *в будущем*. Еще более ярким примером является физика черных дыр: поскольку горизонт событий черной дыры определяется всем веществом, падающим на черную дыру на протяжении ее существования, динамика горизонта определяется путем задания граничных условий не в прошлом, а в будущем [24]. Поэтому подход, основанный на применении «принципа согласованности в будущем», выглядит даже менее странно, чем использование «телеологических» граничных условий в физике черных дыр. В конце концов, вся остальная физика разворачивается на арене пространства-времени не какой-то абстрактной, а совершенно реальной вселенной, и не кажется таким уж странным, что требование согласованности накладывает условие не только на локальные физические законы, но и на геометрию пространства-времени этой вселенной.

Если серьезно отнестись к «принципу согласованности в будущем», то, как мы видели, его использование накладывает достаточно жесткие условия на динамику вселенной (см., например, условия (*i*), (*ii*) из раздела 3.2). Это означает, что такой принцип вовсе не носит какого-то «общефилософского» значения, а является чисто физическим и проверяемым. Резонно предположить, что последовательное и систематическое изучение данного принципа позволит получить еще более строгие ограничения на то, какой должна быть вселенная. Хорошо известно, что очень многие параметры наблюдаемой вселенной оказываются тщательно «подогнанными», и единственным существующим объяснением этого удивительного обстоятельства является антропный принцип. Антропный принцип имеет смысл только при наличии космологического мультиверса [25], но даже при этом он не объясняет всех совпадений. Не исключено, что использование принципа «согласованности в будущем» позволит усилить антропные предсказания.

## 4. Преобразование Дарбу

Выше мы использовали уравнение (4) в качестве генератора точных «согласованных» космологических решений. Разумеется, уравнение Шредингера можно решить лишь для очень специальных видов потенциала $U(t)$. Эффективным способом генерации новых интегрируемых моделей является метод преобразования Дарбу (ПД) [26; 27], который уже использовался одним из авторов этой статьи в [3] для построения новых классов точных решений уравнений Эйнштейна — Фридмана в рамках метода линеаризации, использованного в [1]. Ключевым свойством, делающим ПД полезным в космологическом контексте, является то, что эти преобразования переводят функции Йоста исходного уравнения Шрёдингера (6) с заданным потенциалом $U$ в функции Йоста уравнения с преобразованным потенциалом $U^{(1)}$ [22]. Другими словами, ПД сохраняют асимптотическое поведение исходных решений при условии, что опорные функции, входящие в крамовские определители (см. [23]), имеют перемежающиеся нули. С точки зрения построения точных решений, описывающих «согласованные» космологические модели, это свойство можно переформулировать следующим образом: корректно выбирая опорные функции, с помощью которых реализуется ПД, можно получать бесконечные последовательности таких потенциалов $U^{(n)}$, что решения уравнения (4) будут описывать согласованные в будущем космологические модели, то есть модели, удовлетворяющие условиям (*i*), (*ii*) из раздела 3.2. Мы не будем приводить точное математическое доказательство этого утверждения, а ограничимся демонстрацией одного конкретного примера.

Пусть $w = -1/3$. Легко убедиться, что уравнение (6) выполняется при $\lambda = U = 0$, а решение имеет вид

$$a(t) = a_0 t,\ \ \rho = \frac{3\left(a_0^2 + c^2\right)}{8\pi G a_0^2 t^2},\ \ p = -\frac{c^2\left(a_0^2 + c^2\right)}{8\pi G a_0^2 t^2}. \tag{57}$$

Для реализации ПД необходимо второе, отличное от (57) решение $\psi_1$ (6) с тем же потенциалом $U = 0$, но другим значением спектрального параметра $\lambda_1$. Будем считать, что значение спектрального параметра отрицательно: $\lambda = -\kappa^2$, где $\kappa$ – вещественное число. Регулярное решение уравнения (6) очевидно: $\psi_1 = \operatorname{ch}\kappa t$. Однократное ПД определяется формулами

$$\begin{gathered} a \to a^{(1)} = \frac{\dot{a}\psi_1 - a\dot{\psi}_1}{\psi_1}, \\ U = 0 \to U^{(1)} = U - 2\frac{d^2}{dt^2}\ln\psi_1,\ \ \lambda \to \lambda. \end{gathered} \tag{58}$$

Следовательно,

$$a^{(1)}(t) = a_0(1 - x\operatorname{th}x) \tag{59}$$

с $x = \kappa t$. Несложно убедиться, что

$$\rho^{(1)} = \frac{3}{8\pi G a_0^2}\frac{a_0^2\kappa(\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x)^2 + c^2\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{ch}^2 x(\operatorname{ch}x - x\operatorname{sh}x)^2} > 0$$

и

$$\rho^{(1)} + \frac{3p^{(1)}}{c^2} = \frac{3\kappa^2}{2\pi G\operatorname{ch}^2 x} > 0.$$

Решение (59) описывает вселенную, которая рождается при $x_i \sim -1{,}1997$ и коллапсирует в финальную сингулярность при $x_f = -x_i$. Следовательно, в окрестности точки $x = x_f$

$$a^{(1)} \sim a_0\kappa^2(t_f - t)$$

при $t \to t_f$. То есть построенная нами простейшая модель подобно исходной не содержит горизонтов событий в будущем, как мы и говорили выше. Кроме того,

$$a^{(1)} \sim a_0\kappa^2(t - t_i)$$

при $t \to t_i$, поэтому для нашего решения не выполняются условия применимости знаменитой теоремы Борде — Гута — Виленкина (см. [6]), поскольку параметр Хаббла



$$H = -\frac{\kappa(2x + \operatorname{sh} 2x)}{2\operatorname{ch}^2 x(1 - x\operatorname{th} x)}$$

и $H \to -\infty$ при $t \to t_i$.

Таким образом, можно заключить, что использование ПД может оказаться чрезвычайно эффективным методом генерации новых классов точных космологических решений, демонстрирующих свойство «согласованности».

## Заключение

В данной работе мы предложили простой метод генерации точных решений уравнений Фридмана, при котором задача сводится к решению уравнения Шрёдингера для функции, степенным образом зависящей от масштабного фактора $a^n$, и с «потенциалом», пропорциональным $n^2\rho - 3n(\rho + p/c^2)/2$.

Показано, что данный подход позволяет получать широкий набор интересных решений, включая решения, содержие инфляционную фазу и естественный (без подгона параметров) выход из нее.

Численно проанализирован пример интегрируемого потенциала в виде гармонического осциллятора. Продемонстрировано, что такая модель может быть определенным образом согласована с данными астрономических наблюдений.

Проведен достаточно подробный анализ двухпараметрических семейств решений в пространствах с нулевой (см [1; 3]) кривизной $k = 0$, но для $k = \pm 1$ при $n = 1$.

Выявлено, что такие двухпараметрические решения в общем случае не содержат будущих горизонтов событий, что позволяет говорить о «согласованности» данных моделей. По мере приближения к финальной сингулярности параметр уравнения состояния $w \to -1/3$, а потенциал самодействующего скалярного $V(\phi) \to e^{-\nu\phi}$, что характерно для струнных моделей.

Доказано, что использование преобразований Дарбу позволяет строить богатые семейства точных решений, описывающих «согласованные» космологические модели.

Нет сомнений, что описанный метод может оказаться весьма плодотворным не только в изучении режимов инфляции или при построении моделей пространства-времени без горизонтов, но и в решении других космологических задач. В качестве интересного примера приведем следующий результат, недавно вызвавший активные дебаты и широкий резонанс в научном сообществе. В работе [28] (см. также [29—34]) изучался вопрос о существовании метастабильного dS-вакуума в рамках теории струн. Авторы предположили, что из многообразия вакуумов (логарифм числа которых по оценке «сверху» достигает трех (!) порядков) лишь немногие могут быть физически реализуемы. Физические потенциалы скалярных полей, по мнению авторов этого исследования, должны удовлетворять следующему критерию: модуль логарифмического градиента от потенциала должен быть ограничен «снизу» положительной константой. Этот критерий (если он верен) делает практически невозможным реализацию деситтеровского вакуума в рамках фундаментальной теории и однозначно указывает на то, что физическая темная энергия должна быть квинтэссенцией. Этот вывод вполне согласуется с принципом согласованности в будущем. Замечательно и то, что простые лиувиллевские потенциалы вроде тех, что были построены выше, как раз удовлетворяют этому критерию. Разумеется, все это не может служить непосредственным аргументом в пользу принципа «согласованности», но важно отметить, что и результаты работы [28], и использование этого принципа приводят к одинаковым и неожиданным предсказаниям касаемо природы темной энергии — вероятно, главной загадки современной фундаментальной физики.

**Список литературы**

1. *Журавлев В.М., Червон С.В., Щиголев В.К.* Новые классы точных решений в инфляционной космологии // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1998. Т. 114, вып. 2. С. 406—417.

2. *Yurov A.V.* Phantom Scalar Fields Result in Inflation Rather Than Big Rip // Eur. Phys. J. Plus. 2011. Vol. 126, iss. 12. 132.

3. *Верещагин С.Д., Юров А.В.* Преобразование Дарбу и точно решаемые космологические модели // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 139, №3. С. 405—422.

4. *Yurov A.V., Yurov V.A.* Nonsingular Brane Solutions via the Darboux Transformation // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72, iss. 2. 026003.

5. *Andrianov A.A., Cannata F., Kamenshchik A.Y.* Smooth Dynamical Crossing of the Phantom Divide Line of a Scalar Field in Simple Cosmological Models // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72, iss. 4. 043531.

6. *Borde A., Guth A., Vilenkin A.* Inflationary Space-Times are Incompletein Past Directions // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90, iss. 15. 151301.

7. *Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В.* Космология ранней вселенной. М., 1988.

8. *Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P. et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astron. J. 1998. Vol. 116, iss. 3. P. 1009—1038.

9. *Perlmutter S., Aldering G., Goldhaber G. et al.* Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae // Astron. J. 1999. Vol. 517, iss. 2. P. 565—586.

10. *Чернин А.Д.* Космический вакуум // Успехи физических наук. 2001. Т. 171, №11. С. 1154—1175.

11. *Banks T.* Cosmological Breaking of Supersymmetry? arXiv:hep-th/0007146.

12. *Witten E.* Quantum Gravity in De Sitter Space. arXiv:hep-th/0106109.

13. *He X.-G.* Accelerating Universe and Event Horizon. arXiv:astro-ph/0105005.

14. *Gonzalez-Diaz P.F.* Fundamental Theories in a Phantom Universe. arXiv:hep-th/0411070.

15. *Li M.* A Model of Holographic Dark Energy // Phys. Lett. B. 2004. Vol. 603, iss. 1. P. 1—5.

16. *Page D.N.* The Lifetime of the Universe // J. Korean Phys. Soc. 2006. Vol. 49, iss. 9 (2). P. 711—714.

17. *Goheer N., Kleban M., Sussind L.* The Trouble with de Sitter Space // JHEP. 2003. Vol. 7. 056.

18. *Kachru S., Kallosh R., Linde A., Trivedi S.R.* de Sitter Vacua in String Theory // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 68, iss. 4. 046005.

19. *Kachru S., Pearson J., Verlinde H.* Brane / Flux Annihilation and the String Dual of a Nonsupersymmetric Field Theory // JHEP. 2002. Vol. 6. 021.

20. *Yurov A.V., Yurov V.A.* One More Observational Consequence of Many-Worlds Quantum Theory. arXiv:hep-th/0511238.

21. *Tipler F.J.* Genesis: How the Universe Began According to Standard Model Particle Physics. arXiv:astro-ph/0111520.

22. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformation and Solitons. Berlin ; Heidelberg. 1991.

23. *Crum M.M.* Associated Sturm-Liouville Systems // Quart. J. Math. 1955. Vol. 6, iss. 2. P. 121—127.

24. *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Черные дыры во Вселенной // Успехи физических наук. 2001. Т. 171, №3. С. 307—324.

25. *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М., 1990.

26. *Darboux G.* Sur une proposition relative aux équations linéaires // C.R. Acad. Sci. 1882. Vol. 94. P. 1456—1459.

27. *Darboux G.* Theorié generale des surfaces. N.Y., 1972.

28. *Obied G., Ooguri H., Spodyneiko L., Vafa C.* De Sitter Space and the Swampland. arXiv:1806.08362.

29. *Ooguri H., Palti E., Shiu G., Vafa C.* Distance and de Sitter Conjectures on the Swampland // Phys. Lett. B. 2019. Vol. 788. P. 180—184.

30. *Agrawal P., Obied G., Steinhardt P.J., Vafa C.* On the Cosmological Implications of the String Swampland // Phys. Lett. B. 2018. Vol. 784. P. 271—276.

31. *Denef F., Hebecker A., Wrase T.* de Sitter Swampland Conjecture and the Higgs Potential // Phys. Rev. D. 2018. Vol. 98. 086004.

32. *Akrami Y., Kallosh R., Linde A., Vardanyan V.* The Landscape, the Swampland and the Era of Precision Cosmology // Fortsch. Phys. 2018. Vol. 66. 1800075.

33. *Cicoli M., De Alwis S., Maharana A. et al.* De Sitter vs Quintessence in String Theory // Fortsch. Phys. 2018. Vol. 66. 1800079.

34. *David Marsh M.C.* The Swampland, Quintessence and the Vacuum Energy // Phys. Lett. B. 2019. Vol. 789. P. 639—642.



## Об авторах

Артём Валерьевич Асташёнок — д-р физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: artyom.art@gmail.com

Артём Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Анна Валентиновна Япарова — канд. физ.-мат. наук, ассист., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: AYAparova@kantiana.ru

**The authors**

Prof. Artyom V. Astashenok, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: artyom.art@gmail.com



Prof. Artyom V. Yurov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Dr Anna V. Yaparova, Assistant, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: AYAparova@kantiana.ru