формулой $\chi_a = [\mathfrak{J}_a]$ (см[3, с.9]). При обобщении понятия характеристических направлений точечного отображения для отображения φ возникают две возможности определения конуса характеристических прямых отображения φ :

$$\widetilde{\chi} = [\mathfrak{J}_1] \cap [\mathfrak{J}_2], \qquad \chi = [\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2]. \qquad (3.3)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Конус χ (конус $\widetilde{\chi}$) называется конусом характеристических (слабо характеристических) прямых отображения φ .

Очевидно, выполняется $\chi \subset \widetilde{\chi}$.

Понятие характеристических направлений отображения $P_m \to P_n$ $(m \neq n)$ было введено В.В.Рыжковым [2]. Исключим из рассмотрения нулевые характеристические направления отображений $\Pi_a \circ \varphi$. Следующая теорема показывает, что направления, определяемые конусами $\widetilde{\chi}$ и χ, являются обобщениями характеристических направлений точечного отображения в смысле В.В.Рыжкова соответственно для слабой и для сильной геометрии многообразий нуль-пар.

Т е о р е м а 3.1. Чтобы направление, определяемой в точке P° инфлексионной в ней кривой $\ell : R \to P_m$ $(\ell(0)=P^\circ)$, было характеристическим (слабо характеристическим), необходимо и достаточно, чтобы кривая $\varphi \cdot \ell : R \to R(\rho, \pi)$ была в элементе $\ell(0)$ инфлексинной (слабо инфлексионной).

Доказательство следует из формул (1.6), (1.8), (1.9) работы [3].

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве: Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1969, с.179-206.

2. Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. - Тр. Геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1971, с.235-242.

3. А н д р е е в Б.А. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии соответствий между точечным проективным пространством и пространством нуль-пар. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып.5, Калининград, 1974, с.6-24.

Н. В. Г в о з д о в и ч

О ТРИ-ТКАНЯХ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

1. Рассмотрим три-ткань [1] на дифференцируемом многообразии M^{2r} , образованную тремя слоениями коразмерности r , находящимися в общем положении на M^{2r} . Пусть на многообразии M^{2r} задано векторное поле $\xi = \underset{1}{\xi}^i \underset{2}{e}_i - \underset{2}{\xi}^i \underset{1}{e}_i$. Справедливы [2] следующие предложения :

А. Векторное поле ξ порождает инфинитезимальный автоморфизм три-ткани тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\nabla \underset{1}{\xi}^i = (\xi^i_j + 2 a^i_{jk} \underset{1}{\xi}^k) \underset{1}{\omega}^j, \quad \nabla \underset{2}{\xi}^i = (\xi^i_j - 2 a^i_{jk} \underset{2}{\xi}^k) \underset{2}{\omega}^j, \qquad (1)$$
$$\nabla \xi^i_j = b^i_{jkl} (\underset{2}{\xi}^k \underset{1}{\omega}^l - \underset{1}{\xi}^l \underset{2}{\omega}^k.$$

Здесь "∇" - оператор ковариантного дифференцирования относительно связности, порожденной тканью, а a^i_{jk} и b^i_{jkl} , соответственно, тензоры кручения и кривизны ткани. Причем,

$$\nabla b^i_{jkl} = c^i_{jklm} \underset{1}{\omega}^m + c^i_{jklm} \underset{2}{\omega}^m.$$

Б. Три-ткань допускает r^2+2r-s – параметрическую группу инфинитезимальных автоморфизмов, если количество линейно независимых уравнений относительно $\underset{1}{\xi}^i$, $\underset{2}{\xi}^i$, ξ^i_j, в системе, состоящей из соотношений

$$b^i_{[j|m|k]} \underset{1}{\xi}^m + b^i_{[jk]m} \underset{2}{\xi}^m + T_1\left(\begin{smallmatrix} p \\ m \end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\right) \xi^m_p = 0, \qquad (2)$$
$$\underset{1}{c}^i_{jklm} \underset{1}{\xi}^m + \underset{2}{c}^i_{jklm} \underset{2}{\xi}^m + T_2\left(\begin{smallmatrix} p \\ m \end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix} i \\ jkl \end{smallmatrix}\right) \xi^m_p = 0$$

и соотношений, полученных при их внешнем дифференцировании равно s. Здесь мы обозначили

$$T_1\left({}^{p}_{m}\middle|{}^{i}_{jk}\right)=\delta^p_j\, a^i_{mk}+\delta^p_k\, a^i_{jm}-\delta^i_m\, a^p_{jk},$$

$$T_2\left({}^{p}_{m}\middle|{}^{i}_{jkl}\right)=\delta^p_j\, b^i_{mkl}+\delta^p_k\, b^i_{jml}+\delta^p_l\, b^i_{jkm}-\delta^i_m\, b^p_{jkl}. \qquad (3)$$

2. Найдем три-ткани, допускающие группу движений максимального порядка r^2+2r. Для этого необходимо, чтобы ранг системы (2) равнялся нулю. А это будет в том, и только том случае, когда $a^i_{jk}=0$, $b^i_{jkl}=0$, откуда следует параллелизуемость [1] три-ткани. Справедлива

Т е о р е м а 1. Параллелизуемая три-ткань, и только она, допускает группу движений максимального порядка r^2+2r.

3. Будем искать не параллелизуемые групповые три-ткани [1] максимальной подвижности. Рассмотрим матрицу

$$T_1=\left\| T_1\left({}^{p}_{m}\middle|{}^{i}_{jk}\right)\right\| \qquad (4)$$

(здесь $\left({}^{p}_{m}\right)$ – индекс столбца, а $\left({}^{i}_{jk}\right)$ – индекс строки).

Л е м м а 1. Для указанных компонент тензора кручения, стоящих в левом столбце таблицы, в матрице T_1 существует минор порядка, указанного во втором столбце таблицы, в разложении которого эта компонента входит в степени, равной указанному порядку минора

а) $a^{i_1}_{i_1 i_2}$ ($a^{i}_{i_2 i_3}=0$, $a^i_{jk}\neq a_{[j}\delta^i_{k]}$);	а) $3r-4$;
б) $a^{i_1}_{i_2 i_3}$;	б) $3r-6$;
в) $a^i_{jk}=a_{[j}\delta^i_{k]}$;	в) r.

Аналогичная лемма у И.П.Егорова [3]. Справедлива

Т е о р е м а 2. Групповая три-ткань, с отличными от нуля компонентами тензора кручения, указанными в верхней строке таблицы, допускает группу автоморфизмов, порядок которой указан в ее нижней строке

а) $a^i_{jk}=a_{[j}\delta^i_{k]}$;	б) a^1_{23};	в) a^1_{12};
а) r^2+r;	б) r^2-r+6;	в) r^2-r+4.

4. Будем искать паратактические три-ткани (для них $b^i_{(jkl)}=\delta^i_{(j}\lambda_{kl)}$) [1] максимальной подвижности. Продолжение уравнений структуры паратактических тканей дает

$$\underset{\alpha\alpha}{c}{}^i_{jklms}=\underset{\alpha\alpha}{c}{}^i_{(jklms)},$$

$$\underset{21}{c}{}^i_{jklms}-\underset{12}{c}{}^i_{jklsm}+3\,b^i_{(jk|p|}\,b^p_{l)sm}-b^p_{jkl}\,b^i_{psm}, \qquad (5)$$

где мы обозначили $\nabla \underset{\alpha}{c}{}^i_{jklm}=\underset{\alpha 1}{c}{}^i_{jklms}\underset{1}{\omega}{}^s+\underset{\alpha 2}{c}{}^i_{jklms}\underset{2}{\omega}{}^s$. Здесь $\alpha=1,2$. Для матрицы $T_2=\left\|T_2\left({}^{p}_{m}\middle|{}^{i}_{jkl}\right)\right\|$ справедлива

Л е м м а 2. Для указанных компонент тензора кривизны, стоящих в левом столбце следующей таблицы, в матрице T_2 существует минор порядка, указанного во втором столбце таблицы, в разложении которого эта компонента входит в степени, равной порядку указанного минора

а) $b^{i_1}_{i_1 i_2 i_3}$ ($b^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}=b^{i_1}_{i_1 i_2 i_2}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$, $b^{i}_{i i_2 i_3}\neq b^{j}_{j i_2 i_3}$);	а) $4r-5$;
б) $b^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}$ ($b^{i_1}_{i_1 i_2 i_2}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$);	б) $4r-6$;
в) $b^{i_1}_{i_1 i_1 i_2}$ ($b^{i_1}_{i_1 i_2 i_2}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}=b^{i_1}_{i_1 i_1 i_1}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$, $b^{i}_{i i_1 i_2}\neq b^{j}_{j i_1 i_2}$);	в) $3r-3$;
г) $b^{i_1}_{i_1 i_2 i_2}$ ($b^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}=b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$, $b^{i}_{i i_1 i_1}\neq b^{j}_{j i_1 i_1}$);	г) $3r-3$;
д) $b^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ ($b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$);	д) $3r-4$;
е) $b^{i_1}_{i_1 i_1 i_1}$ ($b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$, $b^{i}_{i i_1 i_1}\neq b^{j}_{j i_1 i_1}$);	е) $2r-1$;
ж) $b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}$;	ж) $2r-2$;
з) $b^{i}_{i i_1 i_2}=b^{j}_{j i_1 i_2}$, ($b^{i_1}_{i_1 i_2 i_2}=0$);	з) $2r-1$;
и) $b^{i}_{i i_1 i_1}=b^{j}_{j i_1 i_1}$ ($b^{i_1}_{i_2 i_2 i_2}=0$)	и) r.

($i\neq j$).

Т е о р е м а 3. Не существует паратактических три-тканей, являющихся трансверсально-геодезическими [1].

Для доказательства теоремы достаточно записать вторую серию соотношений (5) для индексов $j=k$, причем,

$i \neq k, l$, откуда сразу следует, что $b^{i}_{ikl}=0$, что и доказывает теорему. В силу леммы 2, теоремы 3 и соотношений (5) справедлива

Т е о р е м а 4. Паратактическая три-ткань, у которой тензор кривизны и тензор его ковариантной производной имеет отличные от нуля компоненты, указанные в левом столбце таблицы, допускает группу автоморфизмов, размерность которой указана в ее правом столбце

b^{2}_{111}	$r^{2}+2$
b^{2}_{111}, $\underset{1}{c}^{2}_{1111}$	$r^{2}+1$
b^{2}_{111}, $\underset{1}{c}^{1}_{1111}$, $\underset{12}{c}^{1}_{11111}=2(b^{1}_{111})^{2}$	r^{2}
b^{1}_{223}	$r^{2}-r+4$
b^{1}_{223}, b^{1}_{233}	$r^{2}-r+3$
b^{1}_{223}, b^{1}_{233}, $\underset{1}{c}^{1}_{2232}$	$r^{2}-r+2$
b^{1}_{223}, b^{1}_{233}, $\underset{1}{c}^{1}_{2232}$, $\underset{1}{c}^{1}_{2333}$	$r^{2}-r+1$
b^{1}_{122}, b^{1}_{112}, $\underset{1}{c}^{1}_{1221}$, $\underset{1}{c}^{1}_{1222}$, $\underset{1}{c}^{1}_{1121}$, $\underset{1}{c}^{1}_{1122}$, $\underset{12}{c}^{1}_{11212}=-(b^{1}_{112})^{2}$, $\underset{12}{c}^{1}_{1222}=-2b^{1}_{112}b^{1}_{122}$, $\underset{12}{c}^{1}_{11222}=-b^{1}_{112}b^{1}_{122}$, $\underset{12}{c}^{1}_{11221}=-(b^{1}_{112})^{2}$, $\underset{12}{c}^{1}_{12211}=-2(b^{1}_{112})^{2}$, $\underset{12}{c}^{1}_{12212}=-2b^{1}_{112}b^{1}_{122}$.	$r^{2}-r$

Три-тканью, обладающей группой инфинитезимальных автоморфизмов большей размерности, чем приведенные в таблице теоремы 4 ткани, будет только изоклинная трансверсально-геодезическая с единственно отличными от нуля компонентами

$$a^{2}_{21}=\ldots=a^{r}_{r1};\quad b^{1}_{111}=b^{2}_{211}=\ldots=b^{r}_{r11};\quad \underset{2}{c}^{i}_{i111}=a^{k}_{k1}b^{l}_{l11}.$$

Все остальные не групповые и не паратактические три-ткани будут иметь группы автоморфизмов размерности не выше, чем ткани рассмотренные в теореме 4. В силу вышесказанного и теорем I, 2, 4 можно сформулировать следующую теорему:

Т е о р е м а 5. Можно выделить пять групп три-тканей максимальной подвижности, которые будут иметь приведенные в таблице группы движений

№ п/п	Размерность группы движений	Ограничения на	Тип тканей
I.	$r^{2}+2r$	r-любое	Групповая три-ткань
2.	$r^{2}+r$ $r^{2}+r-1$	$r \geqslant 2$ $r \geqslant 2$	Групповая изоклинная три-ткань Изоклинная трансверсально-геодезическая три-ткань
3.	$r^{2}+2$, $r^{2}+1$, r^{2}	$r \geqslant 2$ -любое	Паратактическая три-ткань
4.	$r^{2}-r+6$	$r \geqslant 3$	Групповая три-ткань
5.	$r^{2}-r+4$, от $r^{2}-r+4$ до $r^{2}-r+1$, $r^{2}-r$	$r \geqslant 2$ $r \geqslant 3$ $r \geqslant 2$	Групповая три-ткань Паратактические три-ткани

Список литературы

I. А к и в и с М. А. О три-тканях многомерных поверхностей.-Тр. геом. семинара Ин-та науч. информ. АН СССР, т. 2, 1969, с. 7 - 31.

2. Г в о з д о в и ч Н. В. Об инфинитезимальных автоморфизмах многомерных три-тканей. Рук. деп. в ВИНИТИ, № 1291 - 80 Деп.

3. Е г о р о в И. П. Движения в пространствах аффинной связности.-Учен.зап.Пензенского пед.ин-та, Казань, 1965, с.5-179

2 Зак. 17068