Квадрика (3.I) касается квадрики (3.9) вдоль коники (3.2). Так как

$$d\Phi = -\Phi\,\omega_3^3, \qquad (3.10)$$

то квадрика (3.9)-инвариантная.

С л е д с т в и е. Фокальная конгруэнция коник C является конгруэнцией C_0.

Т е о р е м а 3.3. Пусть Q^* –квадрика, S -произвольная гладкая поверхность, (C) -конгруэнция коник C, являющихся сечениями квадрики Q^* касательными плоскостями к поверхности S, Q –квадрики, касающиеся квадрики Q^* вдоль коник C. Конгруэнция (Q) квадрик Q является конгруэнцией K_0. Эта теорема дает безынтегральное представление конгруэнции K_0 Доказательство её аналогично доказательству теоремы 2.I,

Т е о р е м а 3.4. Фокальное многообразие квадрики $Q\in K_0$ состоит из коники C и двух точек пересечения с квадрикой Q прямой

$$a x^1 + s^1 x^4 = 0, \qquad a x^2 + s^2 x^4 = 0, \qquad (3.11)$$

проходящей через характеристическую точку A_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальное многообразие квадрики $Q\in K_0$ определяется уравнениями

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0,\ x^4(s^1x^4-ax^1)=0,\ x^4(s^2x^4-ax^2)=0. \qquad (3.12)$$

Следовательно, оно состоит из коники (3.2) и пары точек

$$M_\varepsilon = -s^k A_k + \varepsilon\sqrt{2s^1s^2-a^2}\,A_3 + aA_4, \qquad (3.13)$$

инцидентных прямой (3.II), содержащей характеристическую точку A_3, и квадрике Q.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С., Конгруэнции кривых второго порядка с неопределенными фокальными семействами."Тр.Томского ун-та",I60,I962,5-I5

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В., Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр.Геом.семинара ВИНИТИ СССР,I974,6,II3-I33.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 5I3.73

В.В. М а х о р к и н

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматриваются однопараметрические семейства невырожденных квадрик (многообразия K (I,3)) в трехмерном проективном пространстве. Доказано, что в общем случае квадрики огибают некоторую поверхность S, касаясь её вдоль кривой четвертого порядка L, кривая L огибает в общем случае восемь линий, лежащих на поверхности S.

§I. Фокальные многообразия ранга один и ранга два многообразия K (I,3)

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3, отнесенном к подвижному реперу $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, однопараметрическое семейство (многообразие (I,3) невырожденных поверхностей второго порядка. Деривационные формулы репера $\{A_\alpha\}$ имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1,2,3,4), \qquad (1.1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \qquad (1.2)$$

и условию

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \qquad (1.3)$$

Квадрика Q многообразия $K(1,3)$ определяется уравнением

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \tag{1.4}$$

причем

$$\det \| a_{\alpha\beta} \| = \kappa \neq 0. \tag{1.5}$$

Многообразие $K(1,3)$ задается следующей системой уравнений:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}\tau, \quad \nabla b_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}\tau, \tag{1.6}$$

где

$$\nabla a_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta, \tag{1.7}$$

$$\nabla b_{\alpha\beta} = d b_{\alpha\beta} - b_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - b_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta - b_{\alpha\beta}\tau_1, \tag{1.8}$$

а τ, τ_1 -инвариантные формы параметрической группы [1].

Фокальные многообразия ранга один и ранга два [2]определяются соответственно следующими системами уравнений:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad b_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0. \tag{1.9}$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad b_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad c_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0. \tag{1.10}$$

В общем случае фокальное многообразие ранга один является кривой четвертого порядка,а многообразие ранга два состоит из восьми точек.

§2.Канонический репер многообразия $K(1,3)$

Осуществим следующую канонизацию репера $\{A_\alpha\}$:

$$\begin{gathered} a_{11} = a_{13} = a_{14} = a_{22} = a_{23} = a_{24} = 0, \; a_{12} \neq 0, \\ b_{11} = b_{13} = b_{22} = b_{24} = 0, \; b_{14} \neq 0, \; b_{23} \neq 0, \\ c_{11} = c_{22} = 0, \; a_{33} = a_{44} = 1, \; a_{12} = a_{34} = -\tfrac{1}{2}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Тогда из (1,6),(1.7),(1.8) получим систему пфаффовых уравнений многообразия $K(1,3)$:

$$\begin{gathered} \omega^4_2 = l\,\omega^3_1, \quad \omega^1_3 = m\,\omega^3_1, \quad \omega^3_3 = n\,\omega^3_1, \\ \omega^1_4 = p\,\omega^3_1, \quad \omega^2_4 = r\,\omega^3_1, \quad \omega^3_4 = s\,\omega^3_1, \\ \omega^4_3 = q\,\omega^3_1, \quad \omega^1_1 + \omega^2_2 = \omega^3_1, \quad \omega^1_1 = t\,\omega^3_1, \\ \omega^2_1 = \omega^1_2 = \omega^4_1 = \omega^3_2 = 0, \quad \omega^3_1 = \tfrac{1}{2}\omega^2_3, \\ \omega^4_2 = \tfrac{1}{2}\omega^1_4 = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Замыкая систему (2.2),получим

$$\begin{gathered} dl = l_1\omega^3_1, \quad dm = m_1\omega^3_1, \quad dn = n_1\omega^3_1, \\ dp = p_1\omega^3_1, \quad dr = r_1\omega^3_1, \quad ds = s_1\omega^3_1, \\ dq = q_1\omega^3_1, \quad dt = t_1\omega^3_1. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Канонизация (2.1) репера $\{A_\alpha\}$ имеет следующую геометрическую интерпретацию:точки A_1, A_2 помещены в фокальные точки ранга два,не лежащие на одной прямолинейной образующей квадрики Q ,точки A_3 и A_4 помещены в точках пересечения прямой,полярно сопряженной прямой A_1A_2 относительно квадрики Q, с касательными к фокальному многообразию ранга один (кривой L) в точках A_1 и A_2 .

Анализируя предыдущее,устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а .Однопараметрическое семейство квадрик огибает в общем случае поверхность S ,касаясь её вдоль кривой L ,кривая L огибает в общем случае восемь линий, каждая из которых лежит на поверхности S .

Список литературы

1.Л а п т е в Г.Ф.,Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.-Итоги науки ВИНИТИ.Геометрия,1963,5-64

2.М а х о р к и н В.В.Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3,Калининград,1973,с.50-59.