Список литературы

1. *Mok K., Patterson E., Wong Y.* Structure of symmetric tensors of type (0,2) and tensors of type (1,1) on tangent bundle // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 234. P. 253 – 278.

2. *Matsumoto M.* A relative theory of Finsler spaces // J. Math. Kyoto Univ. 1983. Vol. 23. P. 25 – 37.

3. *Мубаракзянов Г.М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. вузов. Мат. 1963. № 3. С. 99 – 106.

V. Makeev

ON THE LIE ALGEBRAS OF THE INFINITESIMAL RELATIVE ISOMETRICS OF THE SPACES $g_{3,y}$ OF A CERTAIN TYPES

We study the infinitesimal relative isometrics of the weight w in the general metric spaces $g_{3,y}$ of the vector elements with a relative metric. The Lie algebras $L_r, r \geq 5$ of the infinitesimal relative isometrics of the spaces $g_{3,y}$, and the above mentioned spaces, which have solvable groups of the relative isometrics of the dimension five of a certain structures have been obtained in the article.

УДК 514.75

Т.Ю. Максакова
(*Балтийский военно-морской институт*)

СВЯЗНОСТИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСОЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Построены двойственные аффинные связности и двойственные проективные связности центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r [1] проективного пространства P_n (1< *r* < *m* < *n*–1). Показано, что обобщенно нормализованная гиперполоса CH_m^r порождает: 1) в расслоении обобщенных нормалей 1-го рода четыре центропроективные

связности $\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ (нормальные связности), 2) в расслоении обобщенных нормалей 2-го рода четыре двойственные им нормальные связности $\overset{\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}\ (\varepsilon = \overline{0,3})$, 3) в касательном расслоении $T(V_r)$ пять аффинных связностей $\overset{\sigma}{\gamma}\ (\sigma = \overline{1,5})$. Кроме того, установлено, что обобщенно нормализованная гиперполоса $\overline{CH}{}^r_m$ (двойственный образ гиперполосы CH^r_m) индуцирует пять аффинных связностей $\overset{\sigma}{\bar{\gamma}}$, двойственных соответственно связностям $\overset{\sigma}{\gamma}$. Выяснены условия попарного совпадения связностей ($\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}, \overset{\sigma}{\gamma}$) и ($\overset{\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}, \overset{\sigma}{\bar{\gamma}}$).

В работе используется следующая схема индексов:

$$\bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n};\quad i,j,k,l = \overline{r+1,m};\quad p,q,r,s,t,h,f = \overline{1,r};$$
$$\alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1};\quad u,v,w = \overline{r+1,n-1};\quad \rho,\tau = \overline{r+1,n};$$
$$\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s},\bar{t},\bar{h},\bar{f} = \overline{0,r}.$$

1. В репере первого порядка R_1 гиперполоса CH^r_m задается уравнениями (без соответствующих замыканий) [1]:

$$\omega^n_0 = 0,\ \omega^v_0 = 0,\ \omega^n_i = 0,\ \omega^\alpha_i = 0,\ \omega^n_\alpha = 0,\ \omega^n_p = a^n_{pq}\omega^q,$$
$$\omega^i_p = b^i_{pq}\omega^q,\quad \omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq}\omega^q,\quad \omega^p_i = b^p_{iq}\omega^q,\quad \omega^p_\alpha = b^p_{\alpha q}\omega^q. \tag{1}$$

Определение. *Обобщенной нормализацией* гиперполосы CH^r_m называется нормализация в смысле Нордена-Чакмазяна [2; 3] ее *направляющей поверхности* V_r, при которой в каждой точке $A_0 \in V_r$ плоскость $N_{n-r}(A_0)$ нормального поля проходит через характеристику $E_{n-r-1}(A_0)$ гиперполосы.

Поля *обобщенных нормалей* 1-го рода N_{n-r} (2-го рода N_{n-l}) определяются соответственно полями квазитензоров

$$\nabla \nu^p_n + \omega^p_n = \nu^p_{nq}\omega^q,\quad \nabla \nu^0_p + \omega^0_p = \nu^0_{pq}\omega^q. \tag{2}$$

Согласно работам [4; 11] обращение в нуль тензора

$$T_p^0 = d_p - \nu_p^0 + a_{ps}^n \nu_n^s, \quad \nabla T_p^0(\nu) = T_{ps}^0 \omega^s - \tag{3}$$

есть условие взаимности [2] обобщенной нормализации гиперполосы $CH_m^r \subset P_n$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик

$$a_{pq}^n x^p x^q + 2d_p x^p x^n + L_{uv}^n x^u x^v + 2l_v x^v x^n + T_n (x^n)^2 = 2x^0 x^n. \tag{4}$$

Обращение в нуль тензора T_n^p:

$$T_n^p \overset{def}{=} W_n^p + F_n^p, \quad dT_n^p - T_n^p \omega_n^n + T_n^q \omega_q^p = T_{nq}^p \omega^q - \tag{5}$$

есть условие коинцидентности гиперполосы CH_m^r [5], а обращение в нуль симметрического тензора Дарбу

$$\left. \begin{aligned} & D_{pqt}^n = a_{pqt}^n - a_{(pq}^n d_{t)}, \nabla D_{pqt}^n + 2D_{pqt}^n \omega_0^0 = D_{pqts}^n \omega^s, \\ & D_{pqts}^n = a_{pqts}^n - a_{s(pq}^n d_{t)} - a_{(pq}^n d_{t)s}, \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

есть условие касания 3-го порядка поля соприкасающихся гиперквадрик (4) с гиперполосой $CH_m^r \subset P_n$.

Отметим, что поля нормалей Фубини $\{F_n^p, F_p^0\}$ и Вильчинского $\{W_n^p, W_p^0\}$ нормализуют гиперполосу $CH_m^r \subset P_n$ взаимно [2].

Под *обобщенным оснащением* гиперполосы $CH_m^r \subset P_n$ в смысле Э. Картана [6] понимается такое оснащение, при котором каждой точке $A_0 \in V_r$ поставлена в соответствие плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$, не имеющая общих точек с касательной плоскостью $T_r(A_0)$ направляющей поверхности V_r [1].

Будем говорить, что гиперполоса CH_m^r оснащена в смысле Э. Бортолотти [7], если каждой точке $A_0 \in V_r$ поставлена в соответствие гиперплоскость $N_{n-1}(A_0)$, не проходящая через точку A_0. Эта гиперплоскость задается уравнением

$$\nu_p^0 x^p + \mu_v^0 x^v + \mu_n^0 x^n - x^0 = 0; \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} & \nabla \mu_v^0 + \omega_v^0 = \mu_{vq}^0 \omega^q, \ \nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pq}^0 \omega^q, \\ & \nabla \mu_n^0 - \mu_v^0 \omega_n^v - \nu_p^0 \omega_n^p + \omega_n^0 = \mu_{nq}^0 \omega^q. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Из (8_1) следует, что в качестве охватов функций μ_v^0 можно взять функции B_v^0 [1]. Таким образом, в этом случае оснащающая гиперплоскость $N_{n-1}(A_0)$ проходит через первую ось Кенигса $K_{n-r-2}(A_0)$ гиперполосы CH_m^r.

2. Следуя работам [8; 9] с учетом уравнений (1; 2; 7; 8), получаем предложение.

Теорема 1. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена-Картана гиперполосе CH_m^r в расслоении обобщенных нормалей N_{n-r} индуцируются четыре нормальные связности $\overset{\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$, определяемые системами слоевых форм:*

$$\overset{\varepsilon}{\theta}{}_v^0 = \omega_v^0 - v_q^0\omega_v^q, \quad \overset{\varepsilon}{\theta}{}_v^u = \omega_v^u - \delta_v^u(\omega_0^0 - v_q^0\omega_n^q), \quad \overset{\varepsilon}{\theta}{}_v^n = 0,$$

$$\overset{\varepsilon}{\theta}{}_n^v = B_{nq}^v\omega_0^q - v_n^p\omega_p^v - B_n^v v_n^p\omega_p^n, \overset{\varepsilon}{\theta}{}_n^n = \omega_n^n - \omega_0^0 + v_p^0\omega_0^p + v_n^p\omega_p^n + \overset{\varepsilon}{\Gamma}{}_{np}^n\omega_0^p,$$

$$\overset{\varepsilon}{\theta}{}_n^0 = \omega_n^0 + v_n^p\omega_p^0 + B_n^v\omega_v^0 - v_q^0(v_{np}^q\omega_0^p + B_n^v\omega_v^q - v_n^q v_n^p\omega_p^n) + v_n^0\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}_{np}^n\omega_0^p, \quad (9)$$

где тензоры $\overset{\varepsilon}{\Gamma}{}_{np}^n$ имеют следующие охваты:

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{np}^n = 0, \quad \overset{1}{\Gamma}{}_{np}^n = T_p^0, \quad \overset{2}{\Gamma}{}_{np}^n = l_p - v_p^0 - a_{pq}^n v_n^q, \quad \overset{3}{\Gamma}{}_{np}^n = a_{pq}^n T_n^q. \quad (10)$$

Нами построен во 2-й дифференциальной окрестности двойственный образ $\overline{CH}{}_m^r$ гиперполосы CH_m^r относительно инволютивного преобразования J форм $\omega_J^{\overline{K}}$ [10]. В силу этого имеет место теорема, двойственная теореме 1.

Теорема 2. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена-Бортолотти гиперполосе CH_m^r в расслоении нормалей 2-го рода N_{r-1} индуцируются четыре нормальные связности $\overset{\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, определяемые системами слоевых форм:*

$$\overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\theta}}{}_v^0 = l_{uv}^n(\omega_n^u + v_n^p\omega_p^u), \quad \overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\theta}}{}_v^u = \omega_v^u + l_n^{uw}l_{wvq}\omega_0^q - \delta_v^u(\omega_0^0 - v_n^q\omega_q^n), \quad \overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\theta}}{}_v^n = 0,$$

$$\overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\theta}}{}_n^v = l_n^{vu}(v_p^0\omega_u^p + B_{uq}^0\omega_0^q + B_u^0 v_q^0\omega_0^q), \overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\theta}}{}_n^n = \omega_n^n - \omega_0^0 - v_p^0\omega_0^p + v_n^p\omega_p^n + \overset{\bar{\varepsilon}}{\overline{\Gamma}}{}_{np}^n\omega_0^p,$$

$$\overset{\bar{\varepsilon}}{\bar{\theta}}{}^{0}_{n}=\omega^{0}_{n}-v^{0}_{p}\omega^{p}_{n}-B^{0}_{v}\omega^{v}_{n}+v^{p}_{n}(v^{0}_{pq}\omega^{q}_{0}-B^{0}_{v}\omega^{v}_{p}-v^{0}_{p}v^{0}_{q}\omega^{q}_{0})+\mu^{0}_{n}\overset{\bar{\varepsilon}}{\bar{\Gamma}}{}^{n}_{nq}\omega^{q}_{0}, - \quad (11)$$

где $\overset{0}{\bar{\Gamma}}{}^{n}_{nq}=0, \quad \overset{1}{\bar{\Gamma}}{}^{n}_{nq}=-\overset{1}{\Gamma}{}^{n}_{nq}, \quad \overset{2}{\bar{\Gamma}}{}^{n}_{nq}=\overset{2}{\Gamma}{}^{n}_{nq}, \quad \overset{3}{\bar{\Gamma}}{}^{n}_{nq}=\overset{3}{\Gamma}{}^{n}_{nq},$ (12)

функции l^{n}_{uv}, l^{uv}_{n} *введены в работе [10].*

Из соотношений (9 – 12) с учетом уравнений (1; 3; 5; 6) следует

Теорема 3. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена-Чакмазяна гиперполосе* CH^{r}_{m} *признаки условий попарного совпадения нормальных связностей имеют вид*

$$\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow T^{0}_{p}=0, \quad \overset{0}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{3}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow T^{p}_{n}=0,$$

$$\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow v^{p}_{n}=F^{p}_{n}, \quad \overset{0}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{1}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{2}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow(v^{0}_{p}=F^{0}_{p}, v^{p}_{n}=F^{p}_{n}). \quad (13)$$

Согласно работам [11; 4; 10] с использованием формул (1 – 6), получим следующие предложения.

Теорема 4. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена-Чакмазяна гиперполосе* CH^{r}_{m} *в касательном расслоении* $T(V_r)$ *индуцируются пять аффинных связностей* $\overset{1}{\gamma}-\overset{5}{\gamma}$, *определяемых системами слоевых форм:*

$$\overset{1}{\theta}{}^{q}_{p}=\omega^{q}_{p}-\delta^{q}_{p}\omega^{0}_{0}-\delta^{q}_{p}v^{0}_{s}\omega^{s}_{0}-v^{q}_{n}\omega^{n}_{p}+v^{0}_{p}\omega^{q}_{0}; \quad \overset{2}{\theta}{}^{q}_{p}=\overset{1}{\theta}{}^{q}_{p}+[a^{qs}_{n}a^{n}_{spf}-$$

$$-a^{qt}_{n}a^{n}_{pf}(v^{0}_{t}--a^{n}_{ts}v^{s})-\delta^{q}_{p}(v^{0}_{f}-a^{n}_{fs}v^{s}_{n})-\delta^{q}_{f}(v^{0}_{p}-a^{n}_{ps}v^{s}_{n})]\omega^{f}_{0};$$

$$\overset{3}{\theta}{}^{q}_{p}=\overset{1}{\theta}{}^{q}_{p}+a^{qf}_{n}D^{n}_{fps}\omega^{s}_{0}; \quad \overset{4}{\theta}{}^{q}_{p}=\overset{1}{\theta}{}^{q}_{p}-\delta^{q}_{p}a^{n}_{sf}T^{f}_{n}\omega^{s}_{0}; \quad (14)$$

(14)

$$\overset{5}{\theta}{}^{q}_{p}=\overset{1}{\theta}{}^{q}_{p}+(a^{qf}_{n}D^{n}_{fps}-\delta^{q}_{p}a^{n}_{sf}T^{f}_{n})\omega^{s}_{0}, -$$

при этом первые три связности $\overset{1}{\gamma},\overset{2}{\gamma},\overset{3}{\gamma}$ без кручения, а $\overset{4}{\gamma},\overset{5}{\gamma}$ имеют равные, вообще говоря, ненулевые кручения.

Теорема 5. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена-Чакмазяна гиперполосе* $\overline{CH}{}^{r}_{m}\subset P_n$ *индуцируются пять аффинных связностей* $\overset{\sigma}{\bar{\gamma}}$ *(двойственных соответственно связностям* $\overset{\sigma}{\gamma}$*), определяемых системами слоевых форм:*

$$\overset{1}{\theta}{}^q_p = \overset{1}{\theta}{}^q_p;\ \overset{2}{\theta}{}^q_p = \overset{1}{\theta}{}^q_p;\ \overset{3}{\theta}{}^q_p = \overset{1}{\theta}{}^q_p - a^{qf}_n D^n_{fps}\omega^s_0;$$

$$\overset{4}{\theta}{}^q_p = \overset{1}{\theta}{}^q_p - \delta^q_p a^n_{sf} T^f_n\,\omega^s_0;\ \overset{5}{\theta}{}^q_p = \overset{1}{\theta}{}^q_p - (a^{qf}_n D^n_{fps} + \delta^q_p a^n_{sf} T^f_n\,)\omega^s_0, \ - \qquad (15)$$

причем первые три связности $\overset{1}{\gamma} - \overset{3}{\gamma}$ без кручения, а связности $\overset{4}{\gamma}, \overset{5}{\gamma}$ имеют равные, вообще говоря, ненулевые кручения.

В силу формул (3; 5; 6; 14; 15) имеет место

Теорема 6. *На обобщенно нормализованной в смысле Нордена-Чакмазяна гиперполосе CH^r_m признаки условий попарного совпадения аффинных связностей $\overset{\sigma}{\gamma}$ имеют вид*

$$\overset{1}{\gamma} \equiv \overset{3}{\gamma} \Leftrightarrow \overset{4}{\gamma} \equiv \overset{5}{\gamma} \Leftrightarrow D^n_{pqt} = 0, \quad \overset{1}{\gamma} \equiv \overset{4}{\gamma} \Leftrightarrow \overset{3}{\gamma} \equiv \overset{5}{\gamma} \Leftrightarrow T^p_n = 0,$$

$$\overset{1}{\gamma} \equiv \overset{5}{\gamma} \Leftrightarrow \overset{4}{\gamma} \equiv \overset{3}{\gamma} \Leftrightarrow (D^n_{pqt} = 0, T^p_n = 0), \quad \overset{2}{\gamma} \equiv \overset{3}{\gamma} \Leftrightarrow T^0_p = 0, \qquad (16)$$

$$\overset{1}{\gamma} \equiv \overset{2}{\gamma} \Leftrightarrow (D^n_{pqt} = 0, T^0_p = 0).$$

Замечание. Для двойственного образа гиперполосы $\overline{CH}{}^r_m$ гиперполосы CH^r_m признаки попарного совпадения нормальных связностей (13) и аффинных связностей (16) будут те же, только в формулах (13; 16) надо связности писать с черточкой сверху, т. е. $\overset{\varepsilon}{\overline{\nabla}}$ и $\overset{\sigma}{\overline{\gamma}}$.

Список литературы

1. *Попова Т.Ю.* Центрированные тангенциально вырожденные гиперполосы CH^r_m ранга *r* в проективном пространстве P_n / Калинингр. ВВМУ. Калининград, 1997. Деп. в ВИНИТИ, №197-В97.

2. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.

3. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т. 28. № 4. С.151 – 157.

4. *Максакова Т.Ю.* Двойственные нормальные связности на вырожденной гиперполосе CH^r_m // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С.65 – 69.

5. *Mihailescu T.* Geometrie differentiala projective. Bucuresti, 1958. 494 p.

6. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семин. По вект. и тенз. анализу. М.; Л., 1937. № 4. С. 147 – 159.

7. *Bortolloti E.* Connessioni nelle varieta luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933. Vol. 3. P. 81 – 89.

8. *Фисунов П.А.* О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной гиперполосе / Чуваш. пед. ин-т. Чебоксары, 1998. Деп. в ВИНИТИ, № 3394-В98.

9. *Он же.* Центропроективные связности в нормальных расслоениях регулярной гиперполосы проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. Вып. 30. С. 89 – 94.

10. *Максакова Т.Ю.* Двойственный образ центрированной тангенциально вырожденной гиперполосы CH_m^r // Там же. С. 50 – 54.

11. Столяров А.В. Двойственные аффинные связности на регулярной гиперполосе // Изв. вузов. Мат. 1999. № 9. С. 55 – 63.

T. Maksakova

CONNECTIONS, ASSOCIATE WITH VACUOUS HYPERSTRIP OF THE PROJECTIVE SPACE

The dual affine connections are constructed and dual projective connections for the centered tangential vacuous hyperstrip in the projective space.

УДК 514.75

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

О ДИСКРЕТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрены семейства равнобедренных треугольников с целочисленными основаниями, высотами, опущенными на основание, и боковыми сторонами. Доказано существование единственного целочисленного равнобедренного треугольника с высотой p, с основанием $2p$ ($p > 2$) и двух треугольников с боковой стороной $p \geq 5$, где p – простое число ($p \in P$). Определены четыре последовательности, порождаемые множеством простых чисел, и показано, что при $p > 5$ площадь любого целочисленного равнобедренного треугольника с боковой стороной $p \in P$ кратна 60.

Найдены подмножества всех целочисленных равнобедренных треугольников с заданными основанием a, высотой h и боковой стороной c. Даны конкретные примеры таких подмножеств.