вертого) порядка.

Библиографический список

1.Б а л а з ю к Т.Н. Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов,оснащенных конусом/ ВИНИТИ.М.,1978. 35с. Библиогр.13 назв. Деп. в ВИНИТИ 24.01.1978,№ 267-78.

2.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-94.

3.Н о р д е н А.П.,Т и м о ф е е в Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. высш.учеб.заведений.Математика.1972. № 8 .С.81-89.

4.П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$- распределением проективного пространства. I/ Калинингр.ун-т. Калининград,1984.93с.Библиогр.21 назв. Деп. в ВИНИТИ 2.07.1984. № 4481-84.

5.Ю ш к е в и ч Т.Н. К геометрии аффинного трехсоставного распределения $\mathcal{H}(M(\Lambda))$//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.114-117.

6.П о п о в Ю.И. Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства/ Калинингр.ун-т. Калининград,1987. 50с. Библиогр. 12 назв. Деп.в ВИНИТИ 21.09.87. № 6807-В87.

7.П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением / Тезисы докл. VI Прибалтийской геометр.конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии и их приложениям.Таллин.1984.С.96-97.

8.П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.II. / Калинингр.ун-т.Калининград.1984.36с. Библиогр.8 назв. Деп. в ВИНИТИ 9.01.85. № 252-85 Деп.

9. П о п о в Ю.И. Трехсоставные распределения проективного пространства //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т. Калининград. 1987. Вып.18. С.65-86.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.76

К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ И ПОЧТИ КВАТЕРНИОННОЙ СТРУКТУРЫ

Р.Ф.Домбровский,М.М.Похила
(Черновицкий университет)

1.Пусть M_n - комплексно-аналитическое многообразие и $T_z(M_n)$ -касательное пространство в точке $z \in M_n$.Умножение векторов из $T_z(M_n)$ на мнимую единицу порождает в касательном пространстве $T_x(\mathcal{M}_{2n})$ соответствующего действительного многообразия $\mathcal{M}_{2n}$ автоморфизм φ такой,что $\varphi^2=-I,\ \varphi \in T_x \otimes T_x^*$. Если $\{\underset{x}{\vec{e}}_J\}$ -базис в $T_x(\mathcal{M}_{2n})$и $\{\underset{x}{\vec{\varepsilon}}^J\}$ -взаимный базис из $T_x^*(\mathcal{M}_{2n})$, то

$$\varphi=\varphi_K^J(x)\underset{x}{\vec{e}}_J\otimes\underset{x}{\vec{\varepsilon}}^K,\quad d\varphi_K^J-\varphi_L^J\omega_K^L+\varphi_K^L\omega_L^J=\varphi_{KL}^J\omega^L;\quad I,J,K,L,\ldots=\overline{1,2n}.$$

Формы ω^J -главные формы многообразия,и,следовательно, $d\omega^J=\omega^L\wedge\omega_L^J$, $d\omega_K^J=\omega_K^L\wedge\omega_L^J+\omega^L\wedge\omega_{KL}^J$. Мы будем пользоваться терминологией и основными результатами,изложенными в главе 3 монографии [1].

Почти комплексную структуру называют интегрируемой,если она порождена некоторой комплексно-аналитической структурой. Признаком интегрируемой почти комплексной структуры есть тождественное обращение в ноль тензора Нейенхейса

$$\underset{(\varphi)}{N}{}_{JK}^{I}=\varphi_K^L(\varphi_{LJ}^I-\varphi_{JL}^I)-\varphi_J^L(\varphi_{LK}^I-\varphi_{KL}^I).$$

Рассмотрим комплексифицированное касательное расслоение $T^c(\mathcal{M}_{2n})$ над $\mathcal{M}_{2n}$. Слои этого расслоения представляют собой прямую сумму подпространств $\underset{(\varphi)}{S}{}_n^c(x)$ и $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}_n^c(x)$ -собственных векторов оператора $\varphi(x)$,относящихся к собственным значениям $\pm i$ соответственно.

Почти комплексную структуру φ на многообразии $\mathcal{M}_{2n}$ назовем полуинтегрируемой,если одно из распределений $\underset{(\varphi)}{S}{}_n^c$ или $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}_n^c$ интегрируемо.Многообразие интегрируемой почти комплексной структуры геометрически характеризуется интегрируемостью обоих распределений $\underset{(\varphi)}{S}{}_n^c$ и $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}_n^c$.Оно локально гомеоморфно комплексноаналитическому многообразию.

Необходимые и достаточные условия полуинтегрируемости почти комплексной структуры имеют вид

$$\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{jk} + i\,\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{jl}\varphi^{l}_{k} = 0 \qquad (1)$$

или

$$\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{jk} - i\,\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{jl}\varphi^{l}_{k} = 0. \qquad (2)$$

2.Тензоры Схоутена-Яно

$$\underset{(\varphi)}{O}{}^{jl}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\delta^{j}_{k}\delta^{l}_{j} - \varphi^{j}_{k}\varphi^{l}_{j}\right), \quad \underset{(\varphi)}{\overset{*}{O}}{}^{jl}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\delta^{j}_{k}\delta^{l}_{j} + \varphi^{j}_{k}\varphi^{l}_{j}\right)$$

связаны с тензором Нейенхейса почти комплексной структуры соотношениями

$$\underset{(\varphi)}{O}{}^{kl}_{jj}\,\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{pk} = 0, \quad \underset{(\varphi)}{\overset{*}{O}}{}^{kl}_{jj}\,\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{pk} = 0.$$

Рассмотрим преобразование форм $\tilde{\omega}^{j}_{k} = \omega^{j}_{k} - \Gamma^{j}_{kl}\omega^{l}$. Если функции Γ^{j}_{kl} удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} d\Gamma^{j}_{kl} - \Gamma^{j}_{pl}\omega^{p}_{k} - \Gamma^{j}_{kp}\omega^{p}_{l} + \Gamma^{p}_{kl}\omega^{j}_{p} - \Gamma^{p}_{kl}\Gamma^{j}_{ps}\omega^{s} + \omega^{j}_{kl} = \Gamma^{j}_{klp}\omega^{p}, \\ 2\,\underset{(\varphi)}{\overset{*}{O}}{}^{jl}_{kp}\varphi^{s}_{l}\Gamma^{k}_{sj} = \varphi^{j}_{pj}, \end{cases} \qquad (3)$$

то формы $\tilde{\omega}^{j}_{k}$ будут формами инфинитезимальной φ-связности. Совместность системы (3) устанавливается путем специализации репера $\{\vec{e}_{j}\}$.

Поля линейных элементов $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{n}(x)$ и $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{n}(x)$ относительно φ-связности параллельны. Компоненты тензоров Схоутена-Яно, Нейенхейса и объекта φ-связности удовлетворяют соотношениям $\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{kt} = 4\,\underset{(\varphi)}{\overset{*}{O}}{}^{jj}_{p[k}\,\underset{(\varphi)}{O}{}^{ls}_{|j|t]}\Gamma^{p}_{ls}$. Отсюда следует эквивалентность интегрируемости почти комплексной структуры наличию среди φ-связностей на многообразии почти комплексной структуры плоской φ-связности.

Следует различать среди многообразий почти комплексной структуры многообразия с интегрируемой, полуинтегрируемой и не интегрируемой почти комплексной структурой.

Т е о р е м а. На многообразиях с полуинтегрируемой почти комплексной структурой φ не существует плоских φ-связностей, но существует такая φ-связность, которая индуцирует на интегральном многообразии распределения $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{n}$ плоскую тангенциальную связность, а на распределении $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{n}$ несимметричную нормальную связность.

Объекты индуцированных тангенциальной и нормальных связностей на указанных подмногообразиях многообразий с полуинтегрируемой почти комплексной структурой построены, следуя методике, разработанной в работах[2],[3],[4],[5].

На распределениях $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{n}$ и $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{n}$ каждая из φ-связностей многообразия не интегрируемой почти комплексной структуры порождает несимметричные индуцированные связности.

3. Пусть $n = 2k$. Зададим на $\mathcal{M}_{4k}$ почти кватернионную структуру полями аффиноров φ и ψ почти комплексной структуры ($\varphi^2 = -I, \psi^2 = -I$) такими, что $\varphi(\psi) + \psi(\varphi) = 0$. Тогда аффинор $\chi = \varphi(\psi)$ тоже определяет комплексную структуру.

В зависимости от типа (в смысле интегрируемости) почти комплексных структур φ и ψ, фундаментально оснащающих многообразие почти кватернионной структуры, его можно отнести к многообразиям интегрируемой, частично интегрируемой и не интегрируемой почти кватернионной структуры. Характеристика многообразий почти кватернионной структуры, таким образом, связана с изучением тензоров неголономности распределений $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{2k}$, $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{2k}$, $\underset{(\psi)}{S}{}^{c}_{2k}$, $\underset{(\psi)}{\bar{S}}{}^{c}_{2k}$ и тензоров Нейенхейса $\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{kl}$, $\underset{(\psi)}{N}{}^{j}_{kl}$, $\underset{(\chi)}{N}{}^{j}_{kl}$ структурных аффиноров. Установлено, что элементы распределений $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{2k}$, $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{2k}$, $\underset{(\psi)}{S}{}^{c}_{2k}$ и $\underset{(\psi)}{\bar{S}}{}^{c}_{2k}$ не имеют общих направлений. Известно, что многообразия $\mathcal{M}_{4k}$ интегрируемой почти кватернионной структуры локально аффинны и локально изоморфны k-мерному линейному кватернионному пространству. Операторы, определенные тензорами $\delta^{j}_{k}, \varphi^{j}_{k}, \psi^{j}_{k}, \chi^{j}_{k}$, соответствуют умножению на образующие алгебры кватернионов.

Комбинируя условия типа (I) и (2), можно указать признаки разнообразных многообразий с частично интегрируемой почти кватернионной структурой.

4. Аффинная связность называется почти кватернионной, если относительно этой связности структурные аффиноры почти кватернионной структуры ковариантно постоянны. Примерами почти кватернионных связностей являются канонические почти кватернионные связности, т.е. такие связности, тензоры кручения которых имеют строение

$$A^{j}_{jk} = \underset{(\varphi)}{O}{}^{lp}_{jk}\left(\underset{(\psi)}{N}{}^{j}_{lp} + \underset{(\chi)}{N}{}^{j}_{lp}\right), \quad B^{j}_{jk} = \underset{(\psi)}{O}{}^{lp}_{jk}\left(\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{lp} + \underset{(\chi)}{N}{}^{j}_{lp}\right),$$

$$C^{j}_{jk} = \underset{(\chi)}{O}{}^{lp}_{jk}\left(\underset{(\varphi)}{N}{}^{j}_{lp} + \underset{(\psi)}{N}{}^{j}_{lp}\right).$$

3 Зак. 806

Для интегрируемой почти кватернионной структуры все канонические почти кватернионные связности симметричны и совпадают.

Для многообразий с частично интегрируемой или не интегрируемой почти кватернионной структурой почти кватернионные связности не симметричны.

Многообразия с частично интегрируемой почти кватернионной структурой, для которых $\underset{(\varphi)}{N}{}^{J}_{KL}=0$, $\underset{(\psi)}{N}{}^{J}_{KL}\neq 0$, характеризуются тем, что на них существует почти кватернионная связность с тензором кручения $A^{J}_{\gamma K}$, индуцирующая в слоях $\underset{(\varphi)}{S}{}^{c}_{2K}$ плоскую тангенциальную, а в слоях $\underset{(\varphi)}{\bar{S}}{}^{c}_{2K}$ плоскую нормальную связности.

Библиографический список

I. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М., 1979.Т.9.С.5-247.

2. О с т и а н у Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М., 1983.Т.I3.С.27-76.

3. П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\epsilon)$ - антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры// Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М. 1983. Т.I3.С.77-II7.

4. О с т и а н у Н.М., П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально - геометрическими структурами. I. // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979.С.3-64.

5. О с т и а н у Н.М. Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемом многообразии // Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М., 1977.Т.8.С.89-III.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I9 1988

УДК 514.73

РИМАНОВЫ G - СТРУКТУРЫ КЛАССА $\mathcal{E}_1$

А.А.Е р м о л и ц к и й
(Белорусский технологический институт)

Пусть M многообразие класса C^∞, B_G -некоторая G - структура на M. В классе сопряженных с B_G структур найдется структура, пусть сама B_G, для которой максимальная комактная подгруппа H является подгруппой в $O(n)$. Рассматривая расширение B_H до группы $O(n)$, получаем расслоение $O(M)$, определяющее риманову метрику $g=\langle,\rangle$ на M. Пусть $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{h}$ -алгебры Ли групп Ли $O(n)$ и H, тогда $\mathfrak{O}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}=\mathfrak{h}^{\perp}$ относительно метрики Киллинга и в силу биинвариантности метрики $ad(H)\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Если ω - $\mathfrak{O}$-значная форма римановой связности метрики g, то $\bar{\omega}=\omega|_{\mathfrak{h}}$ задает некоторую связность в B_H [I]. Связности ω, $\bar{\omega}$ могут быть расширены до линейных связностей на M с ковариантными производными ∇, $\bar{\nabla}$.

О п р е д е л е н и е 2. Вторым фундаментальным тензором (B_H, g) назовем тензор $h=\nabla-\bar{\nabla}$; (B_H, g) назовем особой, если $h=0$.

Пусть $h_{XYZ}=\langle h_X Y, Z\rangle$, $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$.

I. О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что структура (B_H, g) принадлежит классу $\mathcal{E}_1$, если $h_{XYZ}=\langle X,Y\rangle\beta(Z)-\langle X,Z\rangle\beta(Y)$, β -ненулевая I-форма на M.

Из соотношения $\langle\xi,X\rangle=\beta(X)$ определяется ненулевое векторное поле ξ на M и

$$h_X Y=\langle X,Y\rangle\xi-\langle\xi,Y\rangle X,\quad X,Y,\xi\in\mathfrak{X}(M). \qquad (I)$$

Отметим, что метрическая связность $\bar{\nabla}$ в этом случае называется связностью Лира [3] и ее кручение имеет вид:

$$\bar{T}(X,Y)=\langle\xi,Y\rangle X-\langle\xi,X\rangle Y.$$

Пусть $L=L(\xi)$-одномерное распределение на M, порожденное полем ξ, $V=L^{\perp}$. Возникает структура почти произведения: