УДК 517.54; 514.144.14

С. В. Мациевский
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
sergei.matsievsky@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-8

Одна геометрическая модель дробно-линейных преобразований

Представлена модель дробно-линейных преобразований комплексной плоскости в виде точек комплексного трехмерного проективного пространства без линейной «запрещенной» квадрики. Представлена модель вещественных дробно-линейных преобразований комплексной плоскости в виде точек вещественного трехмерного проективного пространства без линейной «запрещенной» квадрики. Найдено геометрическое разделение точек, соответствующих параболическим, гиперболическим и эллиптическим вещественным дробно-линейным преобразованиям с помощью «параболического» конуса, касающегося запрещенной квадрики. Найдены некоторые свойства точек модели, соответствующих вещественным дробно-линейным преобразованиям, а также преобразованиям фундаментальных групп двусвязных областей комплексной плоскости.

Ключевые слова: дробно-линейное преобразование, комплексная плоскость, трехмерное проективное пространство, запрещенная квадрика, параболический конус, фундаментальная группа

1. Введение. Неподвижные точки дробно-линейного преобразования

Дробно-линейным преобразованием (отображением), или дробно-линейной функцией, называется преобразование (отображение) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$:

Поступила в редакцию 03.06.2022 г.

$$w = L(z): z \mapsto \frac{x^0 z + x^1}{x^2 z + x^3},$$

где $x^\alpha \in \mathbf{C}$, $z \in \mathbf{C}$, $x^0 x^3 - x^1 x^2 \neq 0$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Если же

$$x^0 x^3 - x^1 x^2 = 0,$$

то дробно-линейное преобразование сводится к постоянной, то есть отображает расширенную комплексную плоскость в одну точку[1—5].

Дробно-линейное преобразование также называют *преобразованием Мёбиуса*, *проективным преобразованием*, *билинейным преобразованием*, *спиновым преобразованием* (теория относительности) [5].

Формула не задает преобразование при $z = \infty$ и $z = -\frac{x^3}{x^2}$. Доопределим преобразование по непрерывности [3—4]:

$$w(\infty) = \frac{x^0}{x^2},\ w(\infty) = \infty \text{ при } x^2 = 0,\ w\left(-\frac{x^3}{x^2}\right) = \infty.$$

Если $L(u) = u$, то точка $u \in \overline{\mathbf{C}}$ *называется неподвижной*. Множество неподвижных точек дробно-линейного преобразования определяется квадратным уравнением

$$x^2 u^2 + (x^3 - x^0)u - x^1 = 0$$

и состоит из двух элементов: u_1 и u_2 [1—2]. Возможны следующие четыре случая [1].

(1) $u_1 \neq u_2$. Имеем:

$$\frac{w - u_1}{w - u_2} = k\frac{z - u_1}{z - u_2},\ k \in \boldsymbol{C}.$$

(1a) $k \in \mathbf{R}$, то есть k вещественно, — *гиперболическое преобразование*.

(1б) модуль $|k| = 1$ — *эллиптическое преобразование.*

(1в) $k \notin \mathbf{R}$, $|k| \neq 1$, — *локсодромическое преобразование.*

(2) $u_1 = u_2$ — *параболическое преобразование.*

2. Группа дробно-линейных преобразований и запрещенная квадрика

Как известно, описанные выше преобразования образуют *группу дробно-линейных преобразований* [1—4; 6—9]. Эта группа изоморфна полной линейной группе $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ невырожденных квадратных матриц второго порядка над полем комплексных чисел **C**:

$$L_2(L_1(z)) \cong \begin{pmatrix} y^0 & y^1 \\ y^2 & y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 & x^1 \\ x^2 & x^3 \end{pmatrix}.$$

Введем на группе $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ следующее отношение эквивалентности *e*:

$$(x^0, x^1, x^1, x^2) \sim (y^0, y^1, y^1, y^2)$$

тогда и только тогда, когда

$$\exists \lambda \in \boldsymbol{C} / \{0\} : x^\alpha = \lambda y^\alpha,\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

В итоге получим

$$\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}} \cong \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) / e,$$

где $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ — группа всех конформных автоморфизмов расширенной комплексной плоскости [5].

Множество-носитель группы $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ можно интерпретировать как множество аналитических точек трехмерного проективного пространства над полем **C** с исключенной из него невырожденной линейчатой квадрикой *Q*, которая определяется квадратным уравнением

$$x^0 x^3 - x^1 x^2 \neq 0.$$

Множество-носитель группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ есть тогда множество точек трехмерного проективного пространства $P_3(\mathbf{C})$ над полем комплексных чисел **C**, исключая квадрику Q. Такую квадрику назовем *запрещенной квадрикой* группы дробно-линейных преобразований. Очевидно, что точка $E=(1, 0, 0, 1)$ проективного пространства $P_3(\mathbf{C})$ представляет собой единицу этой группы (рис. 1)[1] [5].

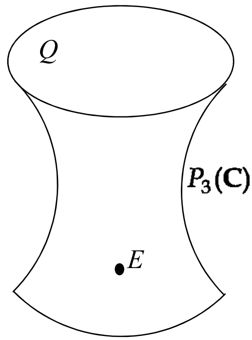

Рис. 1. Запрещенная квадрика

3. Вещественные дробно-линейные преобразования и структура вещественной запрещенной квадрики

Рассмотрим фуксову подгруппу $\overline{\mathbf{G}}$ группы $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$, оставляющую на месте верхнюю полуплоскость плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, то есть

$$x^{\alpha} \in \boldsymbol{R},\ x^0 x^3 - x^1 x^2 > 0\,.$$

Множество-носитель $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathbf{C}}$ можно интерпретировать как множество точек G (вместе с $E = (1, 0, 0, 1)$) трехмерного проективного пространства $P_3(\mathbf{R})$, ограниченных запрещенной

[1] Рисунки в статье весьма условны.

невырожденной линейчатой квадрикой Q [5]. Прямые, проходящие через точку E и касающиеся квадрики Q, образуют *конус параболических преобразований* K, касающийся квадрики Q по эллипсу S (рис. 2).

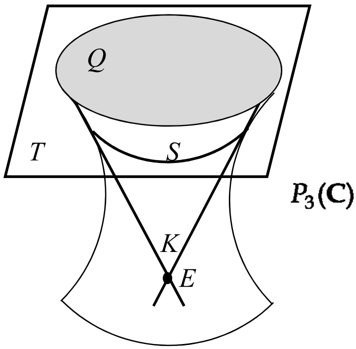

Рис. 2. Запрещенная квадрика и конус K

Обозначим через S эллипс пересечения квадрики Q и плоскости T:

$$x^0 + x^3 = 0 .$$

Точка $X + \lambda E$ тогда и только тогда принадлежит квадрике Q, когда

$$\lambda^2 + \lambda\,(x^0 + x^3) + x^0 x^3 - x^1 x^2 = 0 .$$

Детерминант этого уравнения

$$\Delta = (x^0 - x^3)^2 + 4x^1 x^2$$

совпадает с детерминантом уравнения неподвижных точек

$$x^2 u^2 + (x^3 - x^0)\,u - x^1 = 0 .$$

Поскольку вещественные гиперболические преобразования имеют вещественные неподвижные точки, а эллиптические — комплексно-сопряженные:

— то параболическим вещественным дробно-линейным преобразованиям соответствуют точки пространства $P_3(\mathbf{R})$, лежащие на конусе K, исключая вершину E и эллипс S;

— гиперболическим — внутри K;

— эллиптическим — вне K, но внутри квадрики Q [5].

Локсодромические преобразования отсутствуют.

В дальнейшем не будем различать точку из множества G и соответствующий ей элемент группы $\overline{\mathbf{G}}$.

4. Точки вещественной запрещенной квадрики

1. Рассмотрим внутри квадрики Q точку

$$X = (x^0, x^1, x^2, x^3), \; X \notin T, \; X \neq E.$$

Тогда прямая (EX) пересечет плоскость T в точке

$$X^T = \left(\frac{x^0 - x^3}{2}, x^1, x^2, \frac{x^3 - x^0}{2} \right) = X - \frac{x^0 + x^3}{2} E.$$

Обозначим через $X^{-1} \equiv (-x^3, x^1, x^2, -x^0)$ преобразование, обратное к X. Тогда точки $(X^T, E; X, X^{-1})$ образуют гармоническую четверку [5].

2. Рассмотрим внутри квадрики Q точку

$$X = (x^0, x^1, x^2, x^3), \; X \in T.$$

Поскольку $X^{-1} = X$, то такие точки, и только они, имеют порядок 2 в группе $\overline{\mathbf{G}}$ [5].

3. Если три точки E, X, Y, $Y \neq X^{-1}$, расположенные внутри квадрики Q, коллинеарны, то

$$Y = X + \lambda E, \; x^0 + x^3 + \lambda \neq 0,$$

$$X \cdot Y = X(X + \lambda E) = X + \frac{x^1 x^2 - x^0 x^3}{x^0 + x^3 + \lambda} E.$$

Таким образом, если три точки E, X, Y группы $\overline{\mathbf{G}}$ коллинеарны, то также коллинеарны четыре точки E, X, Y, XY. В общем случае четыре точки E, X, Y, XY не компланарны [5].

5. Вещественные дробно-линейные преобразования и геометрия Лобачевского

Верхняя полуплоскость плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ с группой преобразований $\overline{\mathbf{G}}$ реализует плоскость Лобачевского. Будем рассматривать верхнюю полуплоскость как евклидову плоскость. Угол на ней есть инвариант группы $\overline{\mathbf{G}}$ и сохраняет свое евклидово значение на плоскости Лобачевского. Введем дифференциальный инвариант группы $\overline{\mathbf{G}}$, заменяющий в геометрии Лобачевского евклидов линейный элемент:

$$d\sigma = \frac{ds}{Im\, z},$$

где ds — евклидов линейный элемент на верхней полуплоскости. Длина произвольной кривой l на плоскости Лобачевского равна интегралу линейного элемента $d\sigma$ вдоль этой кривой [1]:

$$\int_l \frac{ds}{Im\, z}.$$

С помощью конформного преобразования метрику Лобачевского можно перенести с верхней полуплоскости почти на любую область комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$. А именно, любую область D комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, имеющую более двух граничных точек в естественной топологии, можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость [3].

Такое конформное преобразование $w(z)$ в случае многосвязной области D многозначно. Отсюда возникает понятие *группы автоморфизмов конформного преобразования* $w(z)$ — подгруппы группы $\overline{\mathbf{G}}$, которая изоморфна *фундаментальной группе* $\pi_1(D)$ многосвязной области D.

В частности, группа $\pi_1(D)$ автоморфизмов конформного преобразования произвольной n-связной области D на верхнюю полуплоскость есть *свободная группа* с образующими в количестве $(n-1)$ [3].

Фундаментальная группа $\pi_1(D)$ состоит только из параболических и гиперболических дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости (группу $\pi_1(D)$ и изоморфную ей группу автоморфизмов конформного преобразования различать не будем), то есть таких, которые не имеют неподвижных точек в верхней полуплоскости и осуществляют параллельный перенос на плоскости Лобачевского [3].

Вернемся к геометрической интерпретации группы $\overline{\mathbf{G}}$ на проективном пространстве (см. рис. 2). Если D — двусвязная область, то преобразования группы $\pi_1(D)$ лежат на одной прямой, проходящей через точку E. Действительно, тогда группа $\pi_1(D)$ порождается одной точкой X, а все точки вида X^n при $n \in \mathrm{Z}$ лежат на прямой (EX) [5]:

$$X \cdot X = X + \frac{x^1 x^2 - x^0 x^3}{x^0 + x^3} E .$$

Группы $\pi_1(D)$ с параболическими преобразованиями суть составляющие параболического конуса K, с гиперболическими — полностью лежат внутри этого конуса, то есть преобразования групп $\pi_1(D)$ полностью заполняют конус.

Список литературы

1. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1 : Основные понятия и принципы / пер. с рум. И. Берштейна. М., 1962.

2. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1 : Начала теории. 2-е изд., испр. и доп. М., 1967.

3. *Евграфов М.А.* Аналитические функции : учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М., 1991.

4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. М., 1976.
5. *Needham T.* Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts. Princeton, N. J., 2021.
6. *Kisil V. V.* Geometry of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of *SL*(2, *R*). L., 2012.
7. *Olsen J.* The Geometry of Möbius Transformations. Rochester, 2010.
8. *Tsai M. Ch., Gu D. W.* Robust and Optimal Control. L., 2014. Part 4 : Linear Fractional Transformations. P. 65—97.
9. *Arnold D. N., Rogness D.* Möbius Transformations Revealed // Notices of the AMS. 2008. Vol. 55, № 10. P. 1226—1231.
10. *Мациевский С. В.* Дробно-линейные преобразования и геометрия Лобачевского. Калининград, 1982. Рукопись.

MSC 2010: 14N99, 30C99, 51N15, 53A20

S. V. Matsievsky
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
sergei.matsievsky@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-53-8

A geometric model of linear fractional transformations

Submitted on June 3, 2022

A model of linear fractional transformations of the complex plane in the form of points of the complex three-dimensional projective space without a linear “forbidden” quadric is presented. A model of real linear fractional transformations of the complex plane in the form of points of the real three-dimensional projective space without a linear “forbidden” quadric is presented. A geometric separation of points corresponding to parabolic, hyperbolic and elliptic real linear fractional transformations by a “parabolic” cone touching the forbidden quadric is found. Some properties of model points corresponding to real linear fractional transforma-

tions are found. Some properties of model points corresponding to fundamental groups transformations of biconnected domains of the complex plane are found.

Keywords: linear fractional transformation, complex plane, three-dimensional projective space, forbidden quadric, parabolic cone, fundamental group

References

1. *Stoilow, S.:* Teoria funcţiilor de o variabilă complex. Vol. 1. Noţiuni şi principii fundamentale. Editura Academiei Republicii Populare Române (1954).

2. *Markushevich, A.I.:* Theory of Analytic Functions. Vol. 1. Beginning of theory. Moscow (1967).

3. *Evgrafov, M.A.:* Analytic Functions. Moscow (1991).

4. *Shabat, B.V.:* Introduction to Complex Analysis. Vol. 1. Moscow (1976).

5. *Needham, T.:* Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts. Princeton, NJ, 2021.

6. *Kisil, V.V.:* Geometry of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of $SL(2, R)$. London (2012).

7. *Olsen, J.:* The Geometry of Möbius Transformations. University of Rochester (2010).

8. *Tsai, M. Ch., Gu, D.W.* Linear Fractional Transformations. Robust and Optimal Control. London (2014).

9. *Arnold, D.N., Rogness, D.:* Möbius Transformations Revealed // Notices of the AMS, **55**:10, 1226—1231 (2008).

10. *Matsievsky, S.V.:* Linear Fractional Transformations and Lobachevsky Geometry. Kaliningrad (1982). The manuscript.