УДК 514.76

К. К. Хабазня
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Вывод структурных уравнений расслоения из уравнений отображения многообразий

Рассматриваются отображения между гладкими многообразиями произвольных размерностей. Приведены уравнения связи структурных форм многообразий и фундаментальные объекты отображений. Дана классификация отображений по соотношениям между размерностями многообразий. В одном из трех классов выведены структурные уравнения расслоения из уравнений отображения многообразий.

Ключевые слова: отображение гладких многообразий, фундаментальные объекты отображений, структурные уравнения расслоения.

1. Уравнения отображения гладких многообразий

Пусть дано дифференцируемое отображение $f\colon V_m \to M_n$ (см.: [1]) гладких многообразий V_m и M_n. На этих многообразиях зададим семейства 1-форм θ^i, $i, j, \ldots = \overline{1,m}$ и ω^α, $\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,n}$ соответственно. Условия полной интегрируемости систем $\theta^i = 0,\ \omega^\alpha = 0$ выглядят следующим образом:

$$D\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j,\ \ D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta, \tag{1}$$

где D — символ внешнего дифференцирования, а $\wedge$ — символ внешнего умножения. Эти формы связаны уравнениями

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_i \theta^i, \tag{2}$$

тогда $\theta^i = 0 \Rightarrow \omega^\alpha = 0$. Действительно, система $\theta^i = 0$ фиксирует точку $x \in V_m$, система $\omega^\alpha = 0$ фиксирует точку $y \in M_n$. Под действием отображения f точка x переходит в точку $y = f(x)$.

2. Фундаментальные объекты отображения

Имеют место следующие дифференциальные уравнения для коэффициентов Λ_i^α:

$$d\Lambda_i^\alpha - \Lambda_j^\alpha \theta_i^j + \Lambda_i^\beta \omega_\beta^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \tag{3}$$

причем $\Lambda_{[ij]}^\alpha = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ji}^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha$.

Утверждение 1. Совокупность коэффициентов Λ_i^α, называемая фундаментальным объектом 1-го порядка отображения f, является тензором.

Утверждение 2. Обращение фундаментального тензора в нуль $\Lambda_i^\alpha = 0$ приводит к вырождению отображения f: $V_m \to y \in M_n$.

Продолжения структурных уравнений (1) имеют следующий вид [2]:

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \theta^k \wedge \theta_{jk}^i, \ \theta_{[jk]}^i \cong 0 \ (\operatorname{mod} \theta^i),$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \omega_{\beta\gamma}^\alpha, \ \omega_{[\beta\gamma]}^\alpha \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \omega^\alpha).$$

Для коэффициентов Λ_{ij}^α дифференциальные уравнения выглядят так:

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_k^\alpha \theta_{ij}^k + \Lambda_i^\beta \Lambda_j^\gamma \omega_{\beta\gamma}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \theta^k, \tag{4}$$

где $\Delta\Lambda_{ij}^\alpha = d\Lambda_{ij}^\alpha - \Lambda_{ik}^\alpha \theta_j^k - \Lambda_{kj}^\alpha \theta_i^k + \Lambda_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha$, причем $\Lambda_{i[jk]}^\alpha = 0$, то есть $\Lambda_{ijk}^\alpha = \Lambda_{ikj}^\alpha$, а по остальным нижним индексам функции Λ_{ijk}^α, вообще говоря, не симметричны.

Утверждение 3. *Функции* Λ_i^α, Λ_{ij}^α *удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3), (4) и составляют фундаментальный объект 2-го порядка* $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ij}^\alpha\}$ *отображения f, который является квадратичным геометрическим объектом.*

Утверждение 4 [4]. *Если при отображении* $f\colon V_m \to M_n$ *гладкие многообразия* V_m *и* M_n *голономны [3], то компоненты* Λ_{ijk}^α *фундаментального объекта 3-го порядка* $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{ijk}^\alpha\}$ *симметричны по всем нижним индексам.*

3. Классификация отображений

Рассматривая отображение $f\colon V_m \to M_n$ между многообразиями V_m и M_n с формами θ^i, $i, j, \ldots = \overline{1,m}$ и ω^α, $\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,n}$ соответственно и связывающими их уравнениями (2), выделим три случая (см.: [1]).

3.1. Параметрическое задание подмногообразия.

В случае $m < n$ при отображении f выделяется подмногообразие $M_m = f(V_m) \subset M_n$ многообразия M_n. Индекс α разбивается на два $\alpha = \{i, a\}$, где $i, \ldots = \overline{1,m}$, $a, \ldots = \overline{m+1,n}$. Так как α — внешний индекс в уравнении (2), оно разбивается на пару уравнений $\omega^i = \Lambda^i_j\theta^j$, $\omega^a = \Lambda^a_i\theta^i$.

3.2. Диффеоморфизм многообразий.

Случай $m = n$ тривиален в том смысле, что уравнение (2) превращается в выражение $\omega^i = \Lambda^i_j\theta^j$ без какого-либо разбиения индексов на серии. Обратим внимание на обратимость матрицы (Λ^i_j). Вывод формул дифференцирования коэффициентов для этого случая в принципе повторяет вывод в общем случае.

3.3. Расслоение прообраза над образом.

Рассмотрим подробнее случай $m > n$, когда индекс i разбивается на два $i = \{\alpha, u\}$, $\alpha, \beta, \ldots = \overline{1,n}$, $u, v, \ldots = \overline{n+1,m}$. Формула (2) принимает вид

$$\omega^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \theta^\beta + \Lambda^\alpha_u \theta^u . \qquad (5)$$

Структурные уравнения (1_1) примут вид

$$D\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta + \theta^u \wedge \theta^\alpha_u , \; D\theta^u = \theta^\alpha \wedge \theta^u_\alpha + \theta^v \wedge \theta^u_v . \qquad (6)$$

По условию невырожденности матрицы (Λ^α_i) подматрица (Λ^α_β) имеет обратную матрицу. Обозначим ее (V^α_β) = $(\Lambda^\alpha_\beta)^{-1}$. Дальше применим эту обратную матрицу к уравнениям (5):

$$V^\gamma_\alpha \omega^\alpha = V^\gamma_\alpha \Lambda^\alpha_\beta \theta^\beta + V^\gamma_\alpha \Lambda^\alpha_u \theta^u .$$

Поскольку $V^\gamma_\alpha \Lambda^\alpha_\beta = \delta^\gamma_\beta$, $\delta^\gamma_\beta \theta^\beta = \theta^\gamma$, получим (ср.: [5]): $\theta^\gamma = V^\gamma_\alpha \omega^\alpha - V^\gamma_\alpha \Lambda^\alpha_u \theta^u$. Подставим эту формулу в структурные уравнения (6_2):

$$D\theta^u = \theta^v \wedge \vartheta^u_v + \omega^\alpha \wedge \vartheta^u_\alpha , \; \vartheta^u_v = \theta^u_v - V^\gamma_\alpha \Lambda^\alpha_v \theta^u_\gamma , \; \vartheta^u_\alpha = V^\gamma_\alpha \theta^u_\gamma . \quad (7)$$

Уравнения (7_1) при фиксации точки многообразия M_n, называемого базой расслоения, дают $D\overline{\theta}^u = \overline{\theta}^v \wedge \overline{\vartheta}^u_v$, где $\overline{\theta} = \theta\big|_{\omega^\alpha = 0}$. Получили структурные уравнения гладкого многообразия V_{m-n}, называемого типовым слоем расслоения, которое обозначим $V_{m-n}(M_n)$.

Утверждение 5. *Уравнения (5) отображения многообразий f: $V_m \to M_n$ при $m > n$ порождают структурные уравнения (1_2, 7_1) общего расслоения $V_{m-n}(M_n)$ над базой M_n, типовым слоем которого является $(m - n)$-мерное гладкое многообразие $V_{m-n} = f^{-1}(y)$, $y \in M_n$.*

Список литературы

1. *Akivis M. A.*, Goldberg V. V. Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps. Springer, 2004.

2. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

3. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Хабазня К. К.* О симметрии фундаментального объекта 3-го порядка при отображении многообразий // «Дни науки — 2014» : материалы студ. конф. Калининград, 2014. (в печати)

5. *Kuzakon V. M., Shelekhov A. M.* Invariants of smooth bundles // The International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems (DGDS — 2013). Abstracts. University Politehnica of Buharest, 2013. P. 6.

K. Khabaznia

Derivation of structure equations of a bundle from the equations of mapping between manifolds

Mappings between smooth manifolds of arbitrary dimensions are considered. Equations of connection between structure forms of manifolds and fundamental objects of this mappings are cited. There is a classification of mappings depended on correlations between manifolds dimensions. In one of three classes there is a producing the structure equations of a bundle from the equations of mapping between manifolds.