

Дифференциальные уравнения, определяющие диффеоморфизм

\mathcal{f} , принимают вид:

$$\theta^i = \Lambda_1^i \omega^i + \Lambda_n^i \omega^n, \quad \theta^n = \Lambda_n^n \omega^n.$$

Учитывая $\Lambda_1^1 = \Lambda_2^2 = \dots = \Lambda_{n-1}^{n-1}$, равенства (7) принимают вид:

$$(\Lambda_n^i L_{ij} - \Lambda_1^i \bar{L}_{ij})(e_1^i e^{n-i} - e_1^{n-i} e^i) e^j e^j - (\Lambda_n^{n-1} e^i - \Lambda_n^i e^{n-1}) L_{ij} e^i e^j \bar{L}_{kp} e^k e^p. \quad (10)$$

Известно, что при смещении точки A вдоль линии ℓ , принадлежащей гиперраспределению Δ , $d^2 A$ принадлежит плоскости $\Delta(A)$ тогда и только тогда, когда

$$L_{ij} e^i e^j = 0. \quad (11)$$

Линии, принадлежащие гиперраспределению Δ , касательные направления которых удовлетворяют условию (11), называются асимптотическими на гиперраспределении Δ . Аналогично, линии, принадлежащие гиперраспределению $\bar{\Delta}$, касательные направления которых удовлетворяют условию $\bar{L}_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j = 0$, называются асимптотическими на гиперраспределении $\bar{\Delta}$.

Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то дифференциальные уравнения линии $\ell = \ell(\ell)$, образа линии ℓ в отображении \mathcal{f} , пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ имеют вид:

$$\theta^i = \Lambda_1^i e^i \theta, \quad \theta^n = 0,$$

и она является асимптотической на гиперраспределении $\bar{\Delta}$ тогда и только тогда, когда $\bar{L}_{ij} e^i e^j = 0$. Справедлива

Т е о р е м а 4. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то асимптотической двойной линии ℓ пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ соответствует в отображении \mathcal{f} асимптотическая двойная линия $\bar{\ell}$ тогда и только тогда, когда

$$\bar{L}_{ij} = k L_{ij},$$

т.е. тензоры (L_{ij}) и (\bar{L}_{ij}) пропорциональны.

Из соотношений (10) имеем:

Т е о р е м а 5. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают и асимптотической двойной линии ℓ пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ соответствует в отображении \mathcal{f} асимптотическая двойная линия, то она характеристическая линия отображения \mathcal{f} .

Рассмотрим ω^n - линию сети σ . Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то соотношения (9) принимают вид:

$$\Lambda_n^i \Lambda_{nn}^{n-1} - \Lambda_n^{n-1} \Lambda_{nn}^i = 0.$$

Т е о р е м а 6. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то ω^n - линия сети σ , касающаяся прямой (AA_n) в точке A , является характеристической линией отображения \mathcal{f} тогда и только

тогда, когда

$$\text{tang} \left(\frac{\Lambda_n^i}{\Lambda_{nn}^i} \right) = 1$$

Библиографический список.

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные поверхности, сети и дифференцируемые отображения пространств // Вопросы дифф. геометрии / МПИ им. В.И.Ленина. М., 1970. Т.1. С.28-40.
2. Б а з ы л е в В.Т. О ∇ -сопряженных сетях в пространствах аффинной связности // Изв. вузов. Матем. 1974. №. С.25-30.
3. Д у л а л а е в а Т.А. К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве P_n // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1981. Вып.12. С.23-26.
4. Д у л а л а е в а Т.А. О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.14-18.
5. Д у л а л а е в а Т.А. К геометрии двойных линий пары гиперраспределений // Тезисы докл. IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев, 1988. С.108.
6. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности / ГИТТЛ. М.; Л., 1950.

УДК 514.75

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ РАССЛОЕНИЯХ И СВЯЗНОСТЯХ В НИХ НА ОСНАЩЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Т.И в л е в

(Томский политехнический институт)

Данная статья является продолжением статьи [1] и посвящена изучению некоторых инвариантных расслоений и связностей в них, которые ассоциируются с оснащенной многомерной поверхностью проективного пространства. С помощью этих связностей дается дополнительная геометрическая характеристика m -поверхностям S_m^k ($k=1, \dots, m$) и $S_m^{1,2,3,4}$ в P_{n+1} , изученным в [1].

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1].

Рассмотренные в [1] инвариантные геометрические образы позволяют изучить следующие расслоенные пространства и связности в них в смысле [2] и [3], имеющие специальный вид для оснащенных m -поверхностей, изученных в [1].

1. Расслоение $T_{m,m} = (S_m, L_m)$.

Базой касательного расслоенного пространства $T_{m,m}$ является m -поверхность S_m , а слоем, соответствующим каждой точке $A_0 \in S_m$, является m -плоскость L_m , касательная к S_m в точке A_0 . В этом пространстве существует аффинная связность P , которая отображает смежную m -плоскость L'_m на исходную L_m в направлении нормали Картана P_{T_0} . Формами этой связности являются $\omega_{\alpha}^{\beta} (\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m})$, которые в силу ([1], (1)-(3), (1f), (23)) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\omega_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta} + P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} \omega_{\sigma}^{\alpha} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \sigma = \overline{1, m}). \quad (1)$$

Здесь компоненты тензоров кручения $P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta}$ и кривизны $P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta}$ определяются по формулам

$$P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} = 0, \quad P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} = 0, \quad P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} = \frac{1}{2} A_{\alpha[\sigma}^{\delta} A_{\delta|\gamma]}^{\beta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{m+1, n+1}). \quad (2)$$

Каждой паре линейно независимых направлений $v = (A_0 A_{\sigma}) v^{\sigma} \in L_m$ и $w = (A_0 A_{\gamma}) w^{\gamma} \in L_m$ отвечает центропроективное преобразование n -плоскости L_m в себя с центром в точке A_0 :

$$P(v, w) = \{ P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} v^{\sigma} w^{\gamma} \}. \quad (3)$$

Геометрическая интерпретация этого преобразования такая же, как и проективитета $R(v, w)$ в ([4], (8)).

Из (3) в силу ([1], (32)) получаем

$$P_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} = 0. \quad (4)$$

на m -поверхности $S_{m,2}$. Поэтому с учетом ([1], (31)) и (2) справедлива

Т е о р е м а 1. Линейное подпространство $\Gamma_{m-2} \subset L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_{m,2}$ является неподвижным при проективном преобразовании $P(v, w), \forall v \in L_m, \forall w \in L_m$. Точка A_0 - ядро преобразования $P(v, w), \forall v, w \in L_m$.

2. Расслоение $N_{m, n-m} = (S_m, P_{T_0})$.

Базой нормального расслоения $N_{m, n-m}$ является m -поверхность S_m , а слоем, соответствующим каждой точке $A_0 \in S_m$, является нормаль Картана P_{T_0} . В этом расслоении существует про-

ективная связность N , которая отображает смежную нормаль P'_{T_0} на исходную P_{T_0} в направлении L_m . Формами этой связности являются ω_{α}^{β} , которые в силу ([1], (1)-(3), (1f), (23)) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\omega_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta} + N_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} \omega_{\sigma}^{\alpha} \wedge \omega_{\gamma}^{\beta}. \quad (5)$$

Здесь компоненты тензора кручения-кривизны $N_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta}$ определяются по формулам:

$$N_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} = \frac{1}{2} A_{\alpha[\sigma}^{\delta} A_{\delta|\gamma]}^{\beta}. \quad (6)$$

Этот тензор каждой паре направлений $v = (A_0 A_{\sigma}) v^{\sigma} \in L_m$ и $w = (A_0 A_{\gamma}) w^{\gamma} \in L_m$ сопоставляет проективитет подпространства P_{T_0} в себя:

$$N(v, w) = \{ N_{\alpha\sigma\gamma}^{\beta} v^{\sigma} w^{\gamma} \}. \quad (7)$$

Геометрическая характеристика этого проективитета аналогична характеристике проективитета $R(v, w)$ в ([4], (8)).

Из ([1], (26)-(31)) и (4) получаем следующие равенства на соответствующих оснащенных m -поверхностях:

$$S_m^1: N_{m+1, \sigma\gamma}^{m+1} = 0, \quad N_{m+1, \sigma\gamma}^{\alpha} = 0;$$

$$S_m^2: N_{m+1, \sigma\gamma}^{\alpha} = 0,$$

$$S_m^4 \Rightarrow S_m^3: N_{\alpha, \sigma\gamma}^{m+1} = 0.$$

Поэтому с учетом ([1], (25)) справедлива

Т е о р е м а 2. Точка A_{m+1} -ядро в каждой точке $A_0 \in S_m^1$ и неподвижна для каждой точки $A_0 \in S_m^2$ при проективитете $N(v, w), \forall v, w \in L_m$. Линейное подпространство Γ_{n-m-1} неподвижно при проективитете $N(v, w), \forall v, w \in L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_m^4 \Rightarrow A_0 \in S_m^3$.

3. Аффинное расслоение $A_{m,n} = (S_m, \Gamma_n)$.

Базой расслоенного пространства $A_{m,n}$ является m -поверхность S_m , а слоем, соответствующим каждой точке $A_0 \in S_m$, является гиперплоскость Γ_n ([1], (25)). В этом расслоении существует аффинная связность A с формами связности $\omega_p^q = \omega_p^s \wedge \omega_s^q - \delta_p^q \omega_{n+1}^{n+1}$ ($p, q, s = \overline{0, n}$), которые в силу ([1], (1)-(3), (1f), (23)) удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\omega_p^q = \omega_p^s \wedge \omega_s^q + A_{p\sigma\gamma}^q \omega_{\sigma}^p \wedge \omega_{\gamma}^q. \quad (8)$$

Здесь компоненты тензора кручения-кривизны определяются по формулам

$$A_{\sigma\sigma\gamma}^0 = -\frac{1}{2} A_{n+1[\sigma}^t A_{t|\gamma]}^{n+1}, \quad A_{\sigma\sigma\gamma}^t = 0, \\ A_{t\sigma\gamma}^q = \frac{1}{2} A_{t[\sigma}^{n+1} A_{n+1|\gamma]}^q - \frac{1}{2} \delta_t^q A_{n+1[\sigma}^t A_{t|\gamma]}^{n+1} \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\alpha\beta}^{\gamma} \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} \quad (1, q, s = \overline{0, n}; a, b, c = \overline{m+1, n}; \alpha = \overline{1, m}).$$

Заметим, что тензор $A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma}$ каждой паре направлений $v, w \in L_m$ сопоставляет центропроективное преобразование гиперплоскости Γ_m в себя с центром в точке A_0 :

$$A(v, w) = \{ A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} v^{\alpha} w^{\beta} \}. \quad (10)$$

Геометрическая характеристика этого преобразования такая же, как и преобразования $R(v, w)$ в ([4], (8)).

Заметим с учетом (11), (21), (24), (25)), что проективитет (10) разбивается на два подпроективитета:

1) центропроективное преобразование m -плоскости L_m в себя с центром в точке A_0 :

$$A^{(1)}(v, w) = \{ A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} v^{\alpha} w^{\beta} \}, \quad (11)$$

который геометрически характеризуется следующим образом:

$$X \in L_m \Rightarrow Y = A^{(1)}(v, w)X = L_m \cap [A(v, w)X \cup \Gamma_{n-m-1}], \quad \forall v, w \in L_m;$$

2) проективитет $(n-m-1)$ -плоскости Γ_{n-m-1} в себя:

$$A^{(2)}(v, w) = \{ A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} v^{\alpha} w^{\beta} \} \quad (12)$$

такой, что

$$\bar{x} \in \Gamma_{n-m-1} \Rightarrow \bar{v} = A^{(2)}(v, w)\bar{x} = \Gamma_{n-m-1} \cap [A(v, w)\bar{x} \cup L_m], \quad \forall v, w \in L_m.$$

Из ([1], (26)-(32)) и (9) следует, что на оснащенных m -поверхностях выполняются следующие соотношения:

$$S_m^1 \text{ или } S_m^2: A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = 0; \quad S_m^3 \text{ или } S_m^4: A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = 0;$$

$$S_{m,\tau}: A_{\alpha_2\beta\gamma}^{\alpha_1} = 0, \quad A_{\alpha_2\beta\gamma}^{\alpha_2} = 0; \quad S_m^{1234}: A_{\alpha\beta\gamma}^{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Поэтому с учетом (9)-(12) и ([1], (2), (24) (31), (12)) имеет место

Т е о р е м а 3. Линейное подпространство Γ_{n-m-1} неподвижно при проективитетах $A(v, w), \forall v, w \in L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_m^1, A_0 \in S_m^2$. Линейное подпространство Γ_{n-m} неподвижно при проективитетах $A(v, w), \forall v, w \in L_m$ в каждой точке $A_0 \in S_{m,\tau}$. Аффинная связность A расслоения $A_{m,n}$ локально-плоская в каждой точке $A_0 \in S_m^1$. Точка $A_0 \in S_m$ неподвижна при проективитетах $A(v, w), \forall v, w \in L_m$.

Библиографический список

1. И в л е в Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.49-56.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНТИ. М., 1979. Т.9. С.7-246.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности // Тр. геометр. семинара / ВИНТИ. М., 1973. Т.4. С.285-307.

4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $R_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. Вып.15. С.32-37.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИЯ ПАР КОНИК СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ ФОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИИРОВАННЫХ КВАДРИК

Л.Г.К о р с а к о в а

(Калининградский государственный университет)

В пространстве P_3 исследуется конгруэнция пар коник C_1, C_2 с несовпадающими плоскостями, имеющих пару общих точек, и ассоциированная с ней конгруэнция квадрик, на каждой квадрике которой фокальное многообразие [1] содержит конику C_1 конгруэнции (C_1) . Изучен частный класс конгруэнций, в которых поверхность, описанная вершиной репера, является огибающей для семейства плоскостей коник C_1 .

Трехмерное проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, где A_1 и A_2 - общие точки коник C_1 и C_2 , A_3 и A_4 - полюсы прямой A_1A_2 соответственно относительно коник C_1 и C_2 . При надлежащей нормировке вершин репера уравнения коник C_1 и C_2 в репере R запишутся в виде:

$$f_1 = (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0; \quad f_2 = (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \quad (1)$$

Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta$ ($\alpha, \beta, \delta = 1, 2, 3, 4$), причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$ и условию $\omega_\alpha^\alpha = 0$. Считая, что плоскости коник C_1 и C_2 описывают двумерные многообразия,