ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.15 1984

УДК 514.75

Т.А. Дулалаева

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В работе рассматривается пара гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве P_n и изучаются свойства двойных линий пары гиперраспределений.

1. Пусть в проективном пространстве P_n заданы:
1/ две диффеоморфные области Ω и $\bar\Omega$
2/ $(n-1)$-распределения Δ в области Ω и $\bar\Delta$ в области $\bar\Omega$,
3/ диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ такой, что $\forall A\in\Omega$ $f(A)\notin\Delta(A)$, $\forall B\in\bar\Omega$ $f^{-1}(B)\notin\bar\Delta(B)$. Тогда мы скажем, что в пространстве P_n задана пара гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$.

Присоединим к паре областей $\Omega,\bar\Omega$ подвижные проективные реперы $R^A=\{A,A_1,\dots,A_{n-1},A_n\}$ и $\bar R^{A_n}=\{A_n,A_1,\dots,A_{n-1},A_n\}$, где $A\in\Omega$, $A_n=f(A)\in\bar\Omega$, $A_i\in\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$, $i,j=1,\dots,n-1$.

Система дифференциальных уравнений, определяющих пару гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, имеет вид:
$\omega_i^n=l_{i\alpha}\omega^\alpha$, $\theta_i^n=\bar l_{i\alpha}\theta^\alpha$, $\theta^\alpha=\Lambda_\beta^\alpha\omega^\beta$, $\alpha,\beta=\overline{1,n}$, и функции $l_{i\alpha},\bar l_{i\alpha},\Lambda_\beta^\alpha$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$dl_{ij}+l_{ij}(\omega_0^0+\omega_n^n)-l_{ik}\omega_j^k-l_{kj}\omega_i^k=l_{ij\alpha}\omega^\alpha+l_{in}\omega_j^n;$$

$$dl_{in}+l_{in}\omega_0^0-l_{kn}\omega_i^k=l_{in\alpha}\omega^\alpha+l_{ij}\omega_n^j+\omega_i^0;$$

$$d\bar l_{ij}+\bar l_{ij}(\theta_0^0+\theta_n^n)-\bar l_{ik}\theta_j^k-\bar l_{kj}\theta_i^k=\bar l_{ij\alpha}\theta^\alpha+\bar l_{in}\theta_j^n;$$

$$d\bar l_{in}+\bar l_{in}\theta_0^0-\bar l_{kn}\theta_i^k=\bar l_{in\alpha}\theta^\alpha+\bar l_{ij}\theta_n^j+\theta_i^0;$$

$$d\Lambda_j^i+\Lambda_j^i(\omega_0^0-\omega_n^n)-\Lambda_k^i\omega_j^k+\Lambda_j^k\omega_k^i=\Lambda_{j\alpha}^i\omega^\alpha+\Lambda_n^i\omega_j^n-\Lambda_j^n\omega^i;$$

$$d\Lambda_n^i+\Lambda_n^i(\omega_0^0-2\omega_n^n)+\Lambda_n^j\omega_j^i=\Lambda_{n\alpha}^i\omega^\alpha+\Lambda_j^i\omega_n^j-\Lambda_n^n\omega^i;$$

$$d\Lambda_i^n+\Lambda_i^n(2\omega_0^0-\omega_n^n)-\Lambda_j^n\omega_i^j=\Lambda_{i\alpha}^n\omega^\alpha-\Lambda_i^j\omega_j^0+\Lambda_n^n\omega_i^n;$$

$$d\Lambda_n^n+2\Lambda_n^n(\omega_0^0-\omega_n^n)=\Lambda_{n\alpha}^n\omega^\alpha-\Lambda_n^i\omega_i^0+\Lambda_i^n\omega_n^i.$$

Системы функций $l_{i\alpha},\bar l_{i\alpha}$ определяют поля геометрических объектов относительно стационарной подгруппы точки, названные полями фундаментальных объектов первого порядка гиперраспределений $\Delta,\bar\Delta$ соответственно. Функции l_{ij}, l_{in}, $\bar l_{ij}$, $\bar l_{in}$ образуют поля самостоятельных объектов – поля фундаментальных подобъектов первого порядка гиперраспределений, причем (l_{ij}), $(\bar l_{ij})$ являются тензорами, в общем случае несимметричными. Система функций (Λ_β^α) определяет поле геометрического объекта относительно стационарной подгруппы точки, названное [5] полем фундаментальных объектов первого порядка, порождаемым рассматриваемым отображением f. Функции (Λ_j^i), (Λ_n^i), (Λ_i^n) образуют самостоятельные поля объектов – поля фундаментальных подобъектов первого порядка отображения f. Функция (Λ_n^n) является относительным инвариантом диффеоморфизма f.

2. Линию l, как и линию $f(l)$, назовем линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, если $l\subset\Delta$ и $f(l)\subset\bar\Delta$. В работе [4] показано, что любая линия, принадлежащая гиперраспределению Δ, является линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i^n=0$. Это означает соответствие площадок гиперраспределений $\Delta(A)$ и $\bar\Delta(A_n)$ в индуцированном отображении f_*. Обращение в нуль относительного инварианта (Λ_n^n) есть необходимое и достаточное условие принадлежности образа линии ω^n, $\omega^i=0$ $(i=\overline{1,n-1})$, $\omega^n=l^n\theta$ в отображении f гиперраспределению $\bar\Delta$.

3. Линия $l\subset\Omega$, как и линия $f(l)\subset\bar\Omega$, называется двойной линией [7] отображения f, если в каждой точке $A\in l$ касательная к линии l в этой точке пересекает в некоторой точке соответствующую касательную к линии $f(l)$, взятую в точке $f(A)$. Линии ω^n из области Ω, $f(\omega^n)$ из области $\bar\Omega$, а также θ^n из области $\bar\Omega$, $f^{-1}(\theta^n)$ из области Ω являются двойными линиями отображения f.

Необходимые и достаточные условия существования двойных линий отображения f, кроме линий ω^n, θ^n, имеют вид: $\Lambda^i_\alpha \ell^\alpha = \kappa\cdot\ell^i$.

4. Линия ℓ, как и линия $f(\ell)$, называется двойной линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, если она является линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ и одновременно двойной линией отображения f. Точка пересечения касательных соответствующих двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ принадлежит пересечению $\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$.

Т е о р е м а. Двойные линии пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ высекаются развертывающимися поверхностями семейства прямых (AA_n). Необходимым и достаточным условием существования двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ является совпадение фокусов $F=\bar F^i$ на прямой (AA_n). (Случай $n=4$ рассмотрен в работе [3]).

При смещении точки A вдоль линии ℓ, принадлежащей гиперраспределению Δ, имеем

$$dA=\omega^0_0 A+\ell^i\theta A_i,\quad dA_n=\theta^0_0 A_n+\Lambda^i_j\ell^j\theta A_i+\Lambda^n_i\ell^i\theta A.$$

Линия $\ell\subset\Delta$ является линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, если выполнено условие $\Lambda^n_i\ell^i=0$ [4], и двойной линией отображения f, если точки $A, A_n, \ell^i A_i, \Lambda^i_j\ell^j A_i$ принадлежат одной плоскости.

Т е о р е м а. Необходимые и достаточные условия существования двойной линии пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ имеют вид $\Lambda^n_i\ell^i=0$, $\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\ell^i\\ \Lambda^i_j\ell^j\end{pmatrix}=1$.

Пусть гиперраспределения $\Delta,\bar\Delta$ являются соответствующими в индуцированном отображении f_*. Тогда возможны по крайней мере $(n-1)$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Поместим вершины A_i репера R^A в точки пересечения касательных соответствующих двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Тогда $\Lambda^n_i=0$, $\Lambda^j_i=0$ $(j\ne i)$. При этом $F^i=\bar F^i=-\Lambda^i_i A+A_n$. Справедливо

$(A_nF^i, F^jF^k)\cdot(AA_n, F^jF^k)=(AF^i,F^jF^k)$ $(i,j,k$ - различны).

Пусть фокусы F^i на прямой (AA_n) различны. Тогда формы ω^i_j $(i\ne j)$ становятся главными $\omega^i_j=a^i_{j\alpha}\omega^\alpha$ $(i\ne j)$ и имеем следующие соотношения $(\Lambda^j_j-\Lambda^i_i)a^i_{jk}-(\Lambda^k_k-\Lambda^i_i)a^i_{kj}=2\Lambda^i_n H_{jk}$ (i,j,k - различны), где $H_{jk}=\frac12(L_{jk}-L_{kj})$.

5. Точка $F^j_i=-a^j_{ij}A+A_i$ -псевдофокус [1] касательной (AA_i) к двойной линии ω^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Точка $\bar F^j_i=-\frac{a^j_{ij}}{\Lambda^j_j}A_n+A_i$ -псевдофокус касательной (A_nA_i) к двойной линии θ^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Справедливо следующее утверждение:

Прямая, соединяющая соответствующие псевдофокусы F^j_i и $\bar F^j_i$ $(i\ne j)$ на касательных к двойным линиям пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, пересекает прямую (AA_n) в ее фокусе $F^j=-\Lambda^j_j A+A_n$.

6. Соприкасающаяся плоскость двойной линии ω^i (i -фиксировано) пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ определяется точками A, dA, d^2A, и уравнения ее имеют вид $L_{ii}x^t=a^t_{ii}x^n$ $(t=1,2,\dots,n-1;\ t\ne i)$. Соприкасающаяся плоскость двойной линии θ^i (i -фиксировано) пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ есть $\Lambda^i_i\bar L_{ii}x^t=a^t_{ii}x^0$ $(t\ne i)$. Тождественное обращение в нуль относительного инварианта $L_{ii}a^k_{jj}-L_{jj}a^k_{ii}$) (i,j,k -различны) означает, что соприкасающиеся плоскости двойных линий ω^i ($i=1,2,\dots,n-1$) пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ образуют пучок плоскостей. Соприкасающиеся плоскости двойных линий θ^i $(i=\overline{1,n-1})$ пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ образуют пучок плоскостей, если обращается в нуль относительный инвариант $\Lambda^i_i\bar L_{ii}a^k_{jj}-\Lambda^j_j\bar L_{jj}a^k_{ii}$ (i,j,k - различны). Точка пересечения осей этих пучков является центром связки, содержащей прямые пересечения соприкасающихся плоскостей двойных линий ω^i,θ^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$.

7. Соприкасающиеся плоскости двойных линий ω^i,θ^i (i -фиксировано) пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ пересекаются по прямой (AA_n) тогда и только тогда, когда $a^i_{jj}=0$ $(i\ne j)$, т.е. двойные линии ω^i,θ^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ являются (∇,Δ)-геодезическими [2], $(\bar\nabla,\bar\Delta)$-геодезическими соответственно.

При смещении точки A по (∇,Δ)-геодезической двойной линии ω^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ имеем: $dA=\omega^0_0A+\omega^iA_i$ (i -фиксировано), $dA_i=\Lambda^i_i\bar L_{ii}\omega^iA+\omega^i_iA_i+L_{ii}\omega^iA_n$,

$dA_n=\theta^0_0A_n+\Lambda^i_i\omega^iA_i$, т.е. двумерная плоскость (AA_iA_n) -неподвижна. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. (∇,Δ)-геодезическая ($(\bar\nabla,\bar\Delta)$-геодезическая) двойная линия пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ - плоская и принадлежит двумерной плоскости, определяемой ее касательной и прямой (AA_n).

8. Пусть гиперраспределения Δ, $\bar\Delta$ не являются соответсвующими в индуцированном отображении f_*, т.е. $\Lambda_i^n \neq 0$.

Обращение в нуль геометрического объекта (Λ_j^i): $\Lambda_j^i = 0$ $(i \neq j)$ означает, что $(n-1)$-ткань $(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}) \subset \Delta$ становится $(n-1)$-тканью двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$. Если равен нулю геометрический объект $(\bar\Lambda_j^i)$: $\bar\Lambda_j^i = 0$ $(i \neq j)$, то $(n-1)$-ткань $(\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}) \subset \bar\Delta$ становится $n-1$ -тканью двойных линий пары гиперраспределений $(\bar\Delta, f_*^{-1}(\bar\Delta))$, где f^{-1}: $\omega^\alpha = \bar\Lambda_\beta^\alpha \theta^\beta$.

Список литературы

1. Базылев В.Т. О сетях многомерных поверхностей проективного пространства.-Изв.вузов.Математика,1966,2(51), с.9-19.

2. Базылев В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В. Сети на многообразиях.-Проблемы геометрии.ВИНИТИ АН СССР,1981, т.12,с.97-125.

3. Дулалаева Т.А. О паре распределений в P_4.-В кн.: геометрия погруженных многообразий.М.,1979,с.35-43.

4. Дулалаева Т.А. К геометрии пары гиперраспределений в проективном пространстве P_n.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,1981,Вып.12, с.23-26.

5. Лаптев Г.Ф. Фундаментальные объекты отображений.- Тезисы докл.3 Прибалт.конф. Паланга,1968,с.95-96.

6. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-Тр.геометр.семинара. ВИНИТИ АН СССР,1973,т.4,с.71-120.

7. Фиников С.П. О сети двойных линий в точечном соответствии двух поверхностей и в соответствии А -поверхностей.-Математ.сб.Новая серия.АН СССР,1939,т.6(48), вып.3,с.518-520.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.15 1984

УДК 514.75

А.И.Е г о р о в

ЛАКУНАРНЫЕ ОБЩИЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящей статье рассматриваются движения в общих метрических пространствах $g_{n,u}$ опорных векторных плотностей веса W.

Пусть дано базисное дифференцируемое многообразие X_n класса C^∞ и предположим, что с каждой точкой этого многообразия связывается (ассоциируется) $(n-1)$-мерное пространство значений псевдовекторной плотности веса W. Совокупность точки x базисного многообразия X_n и опорного псевдовектора u называется линейным элементом (x,u), а получаемое объединением (x,u) $(2n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие - многообразием линейных элементов X_{2n-1} класса C^∞.

Предполагается, что на X_{2n-1} задан метрический тензор g, принадлежащий X_n, который превращает последнее в общее метрическое пространство линейных элементов $g_{n,u}$.

Метрический тензор g по определению невырожденный, симметрический тензор типа (0,2), нулевого измерения однородности относительно компонент опорного объекта.

В координатной окрестности $\pi^{-1}(U) \subset X_{2n-1}$, где U открытое множество в X_n и π -каноническое отображение $X_{2n-1}(x,u) \to X_n(x)$, метрический тензор g характеризуется компонентами