ON CANONICAL FLAT CONNECTION
ON LINEAR FRAME BUNDLE

In the article there are considered questions, connected with canonical flat connection on linear frame bundle. We calculated commutators of base vector fields, components of curvature and torsion tensors, values of this connection on vector fields of special types.

УДК 514.76

***Н.А. Тяпин***

*(Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского)*

## ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Найдена алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов и структурные тензоры трехмерной почти контактной метрической структуры 3-го класса Танно.

**1.** Пусть М — нечетномерное гладкое многообразие $\dim M = 2n+1$. Почти контактной структурой на многообразии М называется тройка $(\eta, \xi, \Phi)$ тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры, ξ — векторное поле, называемое характеристическим, Φ — поле тензора типа (1,1), называемое структурным тензором, при этом должны выполнятся следующие условия:

1) $\eta(\xi) = 1$; 2) $\eta \circ \Phi = 0$; 3) $\Phi(\xi) = 0$; 4) $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$ .

Если, кроме того, на М фиксирована риманова структура $g = <,>$, такая что

$$5) < \Phi(X), \Phi(Y) >=< X, Y > -\eta(X)\eta(Y),$$

то четверка $(\eta, \xi, \Phi, g)$ называется почти контактной метрической (или короче, АС-структурой). Многообразие, на котором задана почти контактная [метрическая] структура, называется соответственно почти контактным [метрическим] многообразием [1; 2].

**Теорема Танно [5].** *Пусть M — связное почти контактное риманово многообразие размерности* $2n+1$ *со структурой* $(\eta, \xi, \Phi, g)$*, тогда максимальная размерность его группы автоморфизмов равна* $(n+1)^2$*. Этот максимум достигается тогда и только тогда, когда кривизна в направлении двумерных площадок, содержащих вектор ξ, равна постоянной* K*, причем M является одним из следующих пространств:*

*1) K>0; однородное многообразие Сасаки постоянной* $\phi$*-аналитической кривизны.*

*2) K=0; одно из шести глобальных произведений:* $T \times CP^n$, $T \times CE^n$, $T \times CD^n$, $L \times CP^n$, $L \times CE^n$, $L \times CD^n$*. Здесь* $CP^n$ *— комплексное проективное пространство с метрикой Фубини — Штуди постоянной положительной аналитической кривизны;* $CE^n$ *— унитарное пространство;* $CD^n$ *— открытый шар с однородной келеровой структурой постоянной отрицательной аналитической кривизны; T — окружность; L — прямая.*

*3) K<0; прямое произведение* $L \times CE^n$ *с метрикой специального вида* $g = e^{2kx^{2n+1}}((dx^1)^2 + \ldots + (dx^{2n})^2) + (dx^{2n+1})^2$.

Векторное поле v является инфинитезимальным автоморфизмом почти контактной метрической структуры, если производные Ли вдоль него от всех объектов структуры равны нулю:

$$L_v\eta = 0,\ L_v\xi = 0,\ L_v\Phi = 0,\ L_v g = 0.$$

Или в координатах

$$v^k \frac{\partial \eta_i}{\partial x^k} + \eta_k \frac{\partial v^k}{\partial x^i} = 0\,,\ v^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \xi^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} = 0\,,$$

$$v^k \frac{\partial \Phi^i_j}{\partial x^k} - \Phi^k_j \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Phi^i_k \frac{\partial v^k}{\partial x^j} = 0\,,\ v^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x^j} = 0\,.$$

**2.** Теорема Танно о максимальной размерности групп автоморфизмов почти контактных метрических структур дает нам 3 класса максимально подвижных пространств. Для 3-го класса явно выписан метрический тензор почти контактной метрической структуры. Из условия равенства нулю производной Ли от этого тензора найдем 6-мерную группу движений трехмерного риманова пространства, а затем и 4-мерную группу автоморфизмов почти контактной метрической структуры, а также выпишем вид объектов данной структуры.

Итак, пусть на многообразии $L \times CE^1$ задана метрика

$$g = e^{2kx^3}((dx^1)^2 + (dx^2)^2) + (dx^3)^2\,. \qquad (1)$$

Уравнения движения для метрики (1) имеют вид

$$kv^3 + \frac{\partial v^1}{\partial x^1} = 0\,,\ kv^3 + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} = 0\,,\ \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} = 0\,, \qquad (2)$$

$$e^{2kx^3} \frac{\partial v^1}{\partial x^3} + \frac{\partial v^3}{\partial x^1} = 0\,,\ e^{2kx^3} \frac{\partial v^2}{\partial x^3} + \frac{\partial v^3}{\partial x^2} = 0\,,\ \frac{\partial v^3}{\partial x^3} = 0.$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (2), найдем ее общее решение:

$$v^1 = -k(\frac{c_5}{2} x^{1^2} + c_6 x^1 x^2 + c_1 x^1 - \frac{c_5}{2} x^{2^2} - c_2 x^2 - \frac{c_5}{2k^2} e^{-2kx^3} + c_3)\,,$$

$$v^1 = -k(c_5 x^1 x^2 + \frac{c_6}{2} x^{2^2} + c_1 x^2 - \frac{c_6}{2} x^{1^2} + c_2 x^1 - \frac{c_6}{2k^2} e^{-2kx^3} + c_4)\,,$$

$$v^3 = c_5 x^1 + c_6 x^2 + c_1\,. \qquad (3)$$

Полученные компоненты векторного поля задают 6-параметрическую локальную группу движений пространства с метрикой (1).

**3.** На $L \times CE^1$ вектор $\xi$ должен лежать в 1-мерном распределении, касательном к L. Кроме того, $g(\xi,\xi) = 1$, откуда координаты $\xi(0,0,1)$. Используя $\eta(\xi) = 1$ и учитывая, что 2-мерное распределение — ядро формы η, найдем что η(0,0,1). Из условий $\eta\circ\Phi=0$ и $\Phi(\xi)=0$ следует, что $\Phi^3_j=0$ и $\Phi^i_3=0$. Из $\Phi^2=-id+\eta\otimes\xi$ и $<\Phi(X),\Phi(Y)>=<X,Y>-\eta(X)\eta(Y)$ получим:

$$\Phi^{1^2}_1+\Phi^1_2\Phi^2_1=-1,\ \Phi^2_1\Phi^1_2+\Phi^{2^2}_2=-1,\ \Phi^1_1\Phi^1_2+\Phi^1_2\Phi^2_2=0,$$

$$\Phi^2_1\Phi^1_1+\Phi^2_2\Phi^2_1=0,\ \Phi^{1^2}_1+\Phi^{2^2}_1=1,\ \Phi^{1^2}_2+\Phi^{2^2}_2=1,\ \Phi^1_1\Phi^1_2+\Phi^2_1\Phi^2_2=0.$$

Далее, так как $\Phi^1_2\neq0,\ \Phi^2_1\neq0$, то $\Phi^1_1=-\Phi^2_2$, и, следовательно, $\Phi^1_1(\Phi^1_2-\Phi^2_1)=0$. В силу $\Phi^1_2\neq\Phi^2_1$, выполняется $\Phi^1_1=\Phi^2_2=0$, и тогда $\Phi^1_2=-\Phi^2_1=1$ или $\Phi^1_2=-\Phi^2_1=-1$.

Уравнения $L_v\xi=0$ с учетом вида ξ дают $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^3}=0$. Подставив в них (3), получим, что $c_5=0,\ c_6=0$. Тогда

$$v^1=-k(c_1x^1-c_2x^2+c_3),\ v^2=-k(c_1x^2+c_2x^1+c_4),\ v^3=c_1. \quad (4)$$

Рассмотрим уравнения $L_v\Phi=0$. С учетом условий, полученных для Ф, эти уравнения примут вид

$$\Phi^1_2\frac{\partial v^2}{\partial x^1}-\Phi^2_1\frac{\partial v^1}{\partial x^2}=0,\ \Phi^1_2\frac{\partial v^2}{\partial x^2}-\Phi^1_2\frac{\partial v^1}{\partial x^1}=0,$$

$$\Phi^2_1\frac{\partial v^1}{\partial x^1}-\Phi^2_1\frac{\partial v^2}{\partial x^2}=0,\ \Phi^2_1\frac{\partial v^1}{\partial x^2}-\Phi^1_2\frac{\partial v^2}{\partial x^1}=0. \quad (5)$$

Подставив (4) в (5), получим тождества, т. е. $L_v\Phi=0$. Таким образом, структурные тензоры и операторы алгебры Ли ее инфинитезимальных автоморфизмов имеют вид

$$\eta=dx^3,\ \Phi=-dx^1\otimes\partial_2+dx^2\otimes\partial_1,$$

$$\xi=\frac{\partial}{\partial x^3},\ g=e^{2kx^3}((dx^1)^2+(dx^2)^2)+(dx^3)^2, \quad (6)$$

$$X_1=x^1\partial_1+x^2\partial_2-\frac{1}{k}\partial_3,\ X_1=-x^2\partial_1+x^1\partial_2,\ X_3=\partial_1,\ X_4=\partial_2.$$

Следовательно, справедлива

**Теорема.** В специальной системе координат структурные тензоры трехмерной почти контактной метрической структуры 3-го класса Танно и операторы алгебры Ли ее инфинитезимальных автоморфизмов имеют вид (6).

**_Список литературы_**

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., 2003.
2. *Blair David E.* Contact manifolds in Riemannian geometry, Leet. Notes Math, 1976. 509.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1950.
4. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., 1948.
5. *Tanno Shukichi*. The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 1969. 21, 1. P. 21—38.

*N. Tyapin*

ON INFINITESIMAL AUTOMORFISMS
OF ALMOST CONTACT STRUCTURE

Lie algebra of infinitesimal automorphisms and structure tensors of three-dimensional almost contact metric structure of 3-rd class Tanno [5] are found.

УДК 514.764.3

***А. В. Христофорова***

*(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)*

## ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Найдены двойственные пространства аффинной связности, индуцируемые оснащением регулярного