УДК 514.76

М. В. Глебова[1], Г. А. Султанова[2]
[1] Пензенский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Россия
[2] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева Министерства обороны РФ, Пенза, Россия
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-7

О максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа

Аффинные преобразования в обобщенных пространствах являются одним из важнейших направлений в современной дифференциальной геометрии. В случае прямого произведения более двух пространств аффинной связности вопрос об аффинных преобразованиях данного пространства оставался открытым. М. В. Глебовой и А. Я. Султановым ранее была получена оценка размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств аффинной связности, представляющих собой прямое произведение не менее трех непроективно-евклидовых пространств, удовлетворяющих специальному условию. Такие пространства названы пространствами первого типа. В данной работе доказана точность этой оценки. Для решения поставленной задачи исследована система линейных однородных уравнений, которой удовлетворяют компоненты произвольного инфинитезимального аффинного преобразования. Эта система получена с использованием свойств производной Ли, примененной к тензорному полю кривизны рассматриваемых пространств.

Ключевые слова: прямое произведение пространств аффинной связности, инфинитезимальные аффинные преобразования, алгебра Ли, размерность алгебры Ли

Поступила в редакцию 28.03.2025 г.

1. Основные понятия и сведения

В современной дифференциальной геометрии одной из основных задач геометрии пространства с дифференциально-геометрической структурой является изучение группы аффинных преобразований (автоморфизмов) этого пространства. Исследованию автоморфизмов в различных пространствах аффинных связностей посвящены работы Э. Картана, П.К. Рашевского, П. А. Широкова, И. П. Егорова, А. Я. Султанова [6] и других ученых.

Аффинные преобразования в прямых произведениях двух пространств аффинной связности рассматривались в работах М. В. Моргун [3].

Приведем основные понятия, необходимые для детального изложения материала.

Пусть (M_n, ∇) — пространство аффинной связности без кручения.

Векторное поле X на многообразии M_n, снабженном аффинной связностью ∇, называется *инфинитезимальным аффинным преобразованием* пространства (M_n, ∇), если (см.: [3])

$$L_X \nabla = 0, \tag{1}$$

где L_X — символ производной Ли вдоль векторного поля X.

В локальных координатах уравнение (1) равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\partial_j X^s = X_j^s,$$
$$\partial_i X_j^k + \Gamma_{sj}^k X_i^s + \Gamma_{is}^k X_j^s - \Gamma_{ij}^s X_s^k + X^s \partial_s \Gamma_{ij}^k = 0 \,. \tag{2}$$

Условия интегрируемости системы (2) имеют вид

$$L_X(\nabla^m T) = 0,$$
$$L_X(\nabla^t R) = 0,$$

где $\nabla^m T$, $\nabla^t R$ — ковариантные дифференциалы порядков m и t тензорных полей кручения и кривизны соответственно, m и t — неотрицательные целые числа, $\nabla^0 T = T$, $\nabla^0 R = R$.

Поскольку в работе рассматриваются пространства аффинной связности без кручения, то условия интегрируемости составляют только соотношения

$$L_X(\nabla^t R) = 0.$$

Первую серию условий интегрируемости этой системы составляют уравнения

$$L_X R = 0, \tag{3}$$

где R — тензорное поле кривизны связности ∇.

В локальных координатах уравнения (3) представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений от координат поля X и частных производных от этих координат:

$$X^M \partial_M R^D_{ABC} + R\left({}^D_{ABC}\middle|{}^F_M\right) X^M_F = 0, \tag{4}$$

где $R\left({}^D_{ABC}\middle|{}^F_M\right) = \delta^F_A R^D_{MBC} + \delta^F_B R^D_{AMC} + \delta^F_C R^D_{ABM} - \delta^D_M R^F_{ABC}$.

Известно, что множество всех инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) образует алгебру Ли над полем $\mathbb{R}$ относительно операции коммутирования векторных полей, размерность которой не больше $n^2 + n$ (см.: [1]). Обозначим эту алгебру через $g(M_n,\nabla)$ (см.: [6]).

Если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных X^M_F системы (4), равен r, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) не больше, чем $n^2 + n - r$ (см.: [1]).

2. Прямое произведение пространств аффинной связности

Пусть $({}^a M_{n_a}, \nabla^a)(a = \overline{1, s})$ — пространства аффинной связности без кручения. На прямом произведении

$$M_n = {}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$$

возникает структура гладкого многообразия.

Рассмотрим естественные проекции

$$^{a}\pi: M_n \to {}^{a}M,$$

определенные следующим образом:

$$^{a}\pi(\rho) = {}^{a}\rho,$$

где $\rho = ({}^{1}\rho, \dots, {}^{s}\rho) \in M_n$. Эти проекции позволяют функции, заданные на ${}^{a}M_{n_a}$, продолжить на прямое произведение M_n.

Пусть ${}^{a}f \in C^{\infty}({}^{a}M)$.

Функция $({}^{a}f)_{(0)}$ на ${}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s}$, определенная условием $({}^{a}f)_{(0)} = {}^{a}f \circ {}^{a}\pi$, называется *естественным продолжением функции* ${}^{a}f \epsilon\, {}^{a}M_{n_a}$ на ${}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s}$ $(a = \overline{1,s})$.

Для любых функций, заданных на ${}^{a}M_{n_a}$, имеют место следующие равенства:

$$({}^{a}f + {}^{a}g)_{(0)} = {}^{a}f_{(0)} + {}^{a}g_{(0)},$$

$$(\lambda\, {}^{a}f)_{(0)} = \lambda\, {}^{a}f_{(0)},$$

$$({}^{a}f\, {}^{a}g)_{(0)} = {}^{a}f_{(0)}\, {}^{a}g_{(0)}.$$

Можно доказать, что если X — непрерывное векторное поле на ${}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s}$, такое что $X\, {}^{a}f_{(0)} = 0$ для любых функций ${}^{a}f \in \mathrm{C}^{\infty}\left({}^{a}M_{n_a}\right)(a = \overline{1,s})$, то $X = 0$.

На основании этого свойства можно построить продолжения векторных полей с многообразия ${}^{a}M_{n_a}$ на многообразие ${}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s}$.

Для каждого векторного поля ${}^{a}X \in \mathfrak{I}_0^1({}^{a}M_{n_a})$ $(a = \overline{1,s})$ единственное векторное поле ${}^{a}X^{0}$ на многообразии ${}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s}$, удовлетворяющее условиям

$${}^{a}X^{0}\, {}^{b}f_{0} = \begin{cases} ({}^{a}X\ {}^{a}f)_{(0)}, \text{ если } a = b, \\ 0, \quad \text{если } a \neq b \end{cases}$$

для любых функций ${}^{b}f$ $(b = \overline{1,s})$, называется *естественным продолжением векторного поля* ${}^{a}X$ с многообразия ${}^{a}M_{n_a}$ на многообразие ${}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s}$.

Имеют место следующие тождества:

$$({}^aX + {}^aY)^{(0)} = {}^aX^{(0)} + {}^aY^{(0)},$$

$$[{}^aX, {}^aY]^{(0)} = [{}^aX^{(0)}, {}^aY^{(0)}].$$

Для каждой дифференциальной формы ${}^a\omega$ на многообразии ${}^aM_{n_a}$ единственная дифференциальная форма ${}^a\omega_{(0)}$ на ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, удовлетворяющая условиям

$$({}^a\omega)_{(0)}\left(\left({}^bX\right)^{(0)}\right) = \begin{cases} ({}^a\omega({}^aX))_{(0)}, \text{ если } a = b, \\ 0, \quad \text{ если } a \neq b, \end{cases}$$

для любых ${}^bX \in \mathfrak{I}_0^1({}^bM_{n_b})$ $(b = \overline{1,s})$ называется *естественным продолжением формы* ${}^a\omega$ с многообразия ${}^aM_{n_a}$ на многообразие ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$.

Прямые вычисления позволяют доказать, что справедливы следующие тождества:

$$(1)\ ({}^a\omega + {}^a\overline{\omega})_{(0)} = ({}^a\omega)_{(0)} + ({}^a\overline{\omega})_{(0)},$$

$$(2)\ (\lambda\, {}^a\omega)_{(0)} = \lambda({}^a\omega)_{(0)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Аналогичным образом вводится понятие естественного продолжения тензорных полей.

Аффинная связность ∇ на ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, удовлетворяющая условиям

$$\nabla_{{}^aX^{(0)}}\, {}^bY^{(0)} = \begin{cases} ({}^a\nabla_{{}^aX}\, {}^aY)^{(0)}, \text{если } a = b, \\ 0, \text{если } a \neq b, \end{cases}$$

называется *прямым произведением аффинных связностей* ${}^a\nabla$ заданных на ${}^aM_{n_a}$ $(a = \overline{1,s})$ по А. П. Нордену и обозначается ${}^1\nabla \times \ldots \times {}^s\nabla$, а пространство

$$({}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}, {}^1\nabla \times \ldots \times {}^s\nabla)$$

называется *прямым произведением пространств аффинных связностей* (см.: [4]).

Из последнего определения следует, что если

$$({}^1U \times \ldots \times {}^sU,\ {}^1\varphi \times \ldots \times {}^s\varphi)$$

— локальная карта многообразия ${}^1M_{n_1} \times \ldots \times {}^sM_{n_s}$, то коэффициенты аффинной связности ${}^1\nabla \times \ldots \times {}^s\nabla$ в этой карте определяются следующими соотношениями:

$$\Gamma^{\kappa^1}_{i^1 j^1} = ({}^1\Gamma^{\kappa^1}_{i^1 j^1})_{(0)},$$

$$\Gamma^{n_1+\kappa^2}_{n_1+i^2 n_1+j^2} = ({}^2\Gamma^{\kappa^2}_{i^2 j^2})_{(0)},$$

$$\ldots,$$

$$\Gamma^{n_1+\ldots+n_{s-1}+\kappa^s}_{n_1+\ldots+n_{s-1}+j^s n_1+\ldots+n_{s-1}+j^s} = ({}^s\Gamma^{\kappa^s}_{i^s j^s})_{(0)},$$

в остальных случаях $\Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{AB}} = 0$ $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} = \overline{1, n_1 + \ldots + n_s})$, где ${}^a\Gamma^{\kappa^a}_{i^a j^a}$ $(i^a, j^a, k^a = \overline{1, n_a})$ — коэффициенты аффинных связностей ${}^a\nabla$ в картах $({}^aU,\ {}^a\varphi)$ соответственно.

Аналогичные соотношения справедливы и для составляющих тензорных полей кручения и кривизны.

В дальнейшем у естественных продолжений функций, векторных полей, дифференциальных форм, тензорных полей индекс (0) будем опускать.

3. Алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности специального вида

Пусть $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(a = 1,2, \ldots, s)$ — непроективно-евклидовы пространства аффинной связности без кручения.

Как известно (см., напр., [1]), пространство аффинной связности $({}^aM_{n_a},\ {}^a\nabla)$ $(n_a > 2)$ является непроективно-евклидовым тогда и только тогда, когда тензорное поле Вейля отлично от нулевого. Это условие локально эквивалентно выполнению одного из следующих условий:

(1) существует такая карта $({}^{a}U,\ {}^{a}\varphi)$ гладкого атласа, что составляющая тензора кривизны вида ${}^{a}R^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ $(i_1^a, i_2^a, i_3^a = \overline{= 1, n_a})$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов i_1^a, i_2^a, i_3^a;

(2) в каждой карте $({}^{a}V,\ {}^{a}\varphi)$ все составляющие тензора кривизны вида ${}^{a}R^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$ равны нулю, но существует такая карта $({}^{a}U,\ {}^{a}\varphi)$, что составляющая тензора кривизны вида ${}^{a}R^{i_1^a}_{i_2^a i_3^a i_4^a}$ $(i_1^a, i_2^a, i_3^a, i_4^a = \overline{1, n_a})$ отлична от нуля для некоторых попарно отличающихся индексов $i_1^a, i_2^a, i_3^a, i_4^a$ (см.: [5]).

В данной работе ограничимся лишь рассмотрением случаев, когда все пространства $({}^{a}M_{n_a},\ {}^{a}\nabla)$ $(a = 1,2, \dots, s)$ удовлетворяют условию (1), то есть у которых имеется такая карта $({}^{a}U,\ x^{i^a})$ гладкого атласа, что существует хотя бы одна составляющая тензорного поля кривизны вида ${}^{a}R^{i_1^a}_{i_2^a i_2^a i_3^a}$, отличная от нуля для попарно различных между собой индексов. Тогда прямое произведение этих пространств аффинной связности $({}^{1}M_{n_1} \times \dots \times {}^{s}M_{n_s},\ {}^{1}\nabla \times \dots \times {}^{s}\nabla)$ в дальнейшем будем называть пространством аффинной связности первого типа ${}^{1}A_a \times \dots \times {}^{s}A_a$.

Для пространств первого типа ${}^{1}A_a \times \dots \times {}^{s}A_a$ доказана следующая теорема [2]:

Теорема 1. *Если составляющие* ${}^{1}R^{i_1^1}_{i_2^1 i_2^1 i_3^1}$, ${}^{2}R^{i_1^2}_{i_2^2 i_2^2 i_3^2}$, ..., ${}^{s}R^{i_1^s}_{i_2^s i_2^s i_3^s}$ $(s \geq 3)$ *тензоров кривизны пространств аффинной связности без кручения* $({}^{1}M_{n_1},\ {}^{1}\nabla)$, $({}^{2}M_{n_2},\ {}^{2}\nabla)$, ..., $({}^{s}M_{n_s},\ {}^{s}\nabla)$ *соответственно отличны от нуля, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности* $(M_n,\ \nabla)$ *не превосходит*

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_s)^2 -$$
$$-(3s - 1)(n_1 + n_2 + \dots + n_s) + 2s^2 + 3s.$$

В данной работе докажем, что указанная в теореме 1 граница точная, то есть что имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности первого типа* ${}^1A_a \times \ldots \times^s A_a$ *равна точно*

$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_s)^2 -$$
$$-(3s-1)(n_1 + n_2 + \cdots + n_s) + 2s^2 + 3s.$$

Доказательство. При $s = 1$ максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$, удовлетворяющего условию (1), равна точно $n_1^2 - 2n_1 + 5$. Это утверждение доказано И. П. Егоровым (см.: [1]).

При $s=2$ имеем, что максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности$({}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2},\ {}^1\nabla \times^2 \nabla)$, где пространства аффинной связности $({}^1M_{n_1},\ {}^1\nabla)$, и $({}^2M_{n_2},\ {}^2\nabla)$ удовлетворяют условию (1), равна точно $(n_1 + n_2)^2 - 5(n_1 + n_2) + 14)$. Этот факт доказан в работе М. В. Моргун (см. [5]).

Остановимся на доказательстве точности приведенной оценки для $s \geq 3$.

Пусть $s \geq 3$.

Рассмотрим следующий пример.

В качестве многообразий ${}^aM_{n_a}$ $(a = 1,2,\ldots,s)$ возьмем пространства $\mathbb{R}^{n_a}$, а линейную связность без кручения ${}^a\nabla$, на них определим условиями

$${}^a\Gamma^1_{23} = x^2, \text{ остальные } {}^a\Gamma^{к^a}_{i^a j^a} = 0,$$
$$a = \overline{1,s},\ i^a, j^a, k^a = \overline{1, n_a}.$$

Непосредственными вычислениями находим, что составляющие тензора кривизны для связности ${}^a\nabla$ имеют вид

$${}^aR^1_{223}{=}1,\ \ {}^aR^1_{232} = -1,\ \ a = 1,2,\ldots,s,$$

остальные ${}^aR^{l^a}_{i^a i^a i^a} = 0\ \ (i^a, j^a, k^a, l^a = 1,2,\ldots,n_a)$.

Описанным выше способом строим прямое произведение рассматриваемых пространств аффинной связности. Получим пространство аффинной связности

$$(\mathbb{R}^n, \nabla) = ({}^1\mathbb{R}^{n_1} \times . . . \times^s \mathbb{R}^{n_s},\ {}^1\nabla \times . . . \times^s \nabla),$$

где $n = n_1 + \dots + n_s$.

Очевидно, что построенная связность является связностью без кручения и коэффициентами этой связности являются следующие функции:

$$\Gamma^1_{23} = x^2,$$

$$\Gamma^{n_1+1}_{n_1+2\, n_1+3} = x^{n_1+2},$$

$$\Gamma^{n_1+n_2+1}_{n_1+n_2+2\ \ n_1+n_2+3} = x^{n_1+n_2+2},$$

$$\dots ,$$

$$\Gamma^{n_1+\dots+n_{s-1}+1}_{n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+3} = x^{n_1+\dots+n_{s-1}+2},$$

остальные $\Gamma^{\mathrm{C}}_{\mathrm{AB}} = 0,\ (\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C} = 1, 2, \dots, n_1 + \dots + n_s)$.

Составляющие тензорного поля кривизны будут следующими:

$$R^1_{223} = 1,$$

$$R^{n_1+1}_{n_1+2\, n_1+2\, n_1+3} = 1,$$

$$R^{n_1+n_2+1}_{n_1+n_2+2\, n_1+n_2+2\, n_1+n_2+3} = 1, \dots,$$

$$R^{n_1+\dots+n_{s-1}+1}_{n_1+\dots+n_{s-1}+2\ \ n_1+\dots+n_{s-1}+2\, n_1+\dots+n_{s-1}+3} = 1,$$

остальные $R^D_{ABC} = 0, (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, D = 1, 2, \dots, n_1 + \dots + n_s)$.

Найдем первую серию условий интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M_n, ∇). Для этого в систему (4) подставим найденные составляющие тензорного поля кривизны. Получим следующую систему:

$$
\begin{cases}
X_A^1 = 0, \quad A > 1,\\
X_B^2 = 0, \quad B \geq 3,\\
X_C^3 = 0, \quad C \geq 4,\\
X_1^1 - 2X_2^2 - X_3^3 = 0,\\
X_{n_1+1}^D = 0, \quad D \neq 2, 3, n_1+1,\\
X_F^{n_1+2} = 0, \quad F \neq 1, n_1+1, n_1+2,\\
X_K^{n_1+3} = 0, \quad K \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3,\\
X_{n_1+1}^{n_1+1} - 2X_{n_1+2}^{n_1+2} - X_{n_1+3}^{n_1+3} = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
X_H^{n_1+\dots+n_{s-1}+1} = 0, \quad H \neq 2, 3, n_1+2, n_1+3, \dots,\\
n_1+\dots+n_{s-2}+2, n_1+\dots+n_{s-2}+3, n_1+\dots+n_{s-1}+1,\\
X_Z^{n_1+\dots+n_{s-1}+2} = 0, Z \neq 1, n_1+1, n_1+n_2+1, \dots,\\
\qquad , n_1+\dots+n_{s-1}+1, n_1+\dots+n_{s-1}+2,\\
X_V^{n_1+\dots+n_{s-1}+3} = 0, \quad V \neq 1, n_1+1, \dots,\\
n_1+\dots+n_{s-1}+1, n_1+\dots+n_{s-1}+2, n_1+\dots+n_{s-1}+3,\\
X_{n_1+\dots+n_{s-1}+1}^{n_1+\dots+n_{s-1}+1} - 2X_{n_1+\dots+n_{s-1}+2}^{n_1+\dots+n_{s-1}+2} - X_{n_1+\dots+n_{s-1}+3}^{n_1+\dots+n_{s-1}+3} = 0.
\end{cases}
$$

Вторая серия, а значит, и последующие серии условий интегрируемости являются следствиями этой системы.

Выпишем матрицу B, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$X_A^1 \ (A > 1),\ X_B^2 \ (B \geq 3),\ X_C^3 \ (C \geq 4),$$

$$X_1^1, X_2^2, X_3^3,\ X_{n_1+1}^D \ (D \neq 2, 3, n_1+1),$$

$$X_F^{n_1+2} \ (F \neq 1, n_1+1, n_1+2),$$

$$X_K^{n_1+3} \ (K \neq 1, n_1+1, n_1+2, n_1+3),$$

$$X_{n_1+1}^{n_1+1}, X_{n_1+2}^{n_1+2}, X_{n_1+3}^{n_1+3}, \dots, X_H^{n_1+\dots+n_{s-1}+1}$$

$$(H \neq 2, 3, n_1 + 2, n_1 + 3, \dots, n_1 + \ldots + n_{s-2} + 2,$$

$$n_1 + \ldots + n_{s-2} + 3,\ n_1 + \ldots + n_{s-1} + 1),$$

$$X_Z^{n_1+\ldots+n_{s-1}+2} \quad (Z \neq 1,\ n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + \ldots + n_{s-1} + 1,$$

$$n_1 + \ldots + n_{s-1} + 2),$$

$$X_V^{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}$$

$$(V \neq 1, n_1 + 1, \dots, n_1 + \ldots + n_{s-1} + 1, n_1 + \ldots + n_{s-1} + 2,$$

$$n_1 + \ldots + n_{s-1} + 3),$$

$$X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+1}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+1} - 2X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+2}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+2} - X_{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}^{n_1+\ldots+n_{s-1}+3}.$$

Из сказанного выше следует, что матрица B является матрицей всех условий интегрируемости и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix},$$

причем матрица A_1 имеет следующее строение:

$$A_1 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица порядка n, $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Остальные матрицы $A_2, \ldots, A_s$ имеют аналогичное строение.

Ранг матрицы B равен $r = 3ns - 3s - 2s^2$.

Следовательно, алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства аффинной связности имеет размерность, равную

$$n^2 + n - r = n^2 - n(3s - 1) + 2s^2 + 3s,$$

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Учен. записки Пензенск. пед. ин-та. Казань, 1965.

2. *Глебова М.В., Султанов А.Я.* О размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 70—77. doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

4. *Моргун М.В.* Инфинитезимальные аффинные преобразования прямого произведения пространств аффинной связности : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2009.

5. *Моргун М. В.* Аффинные преобразования прямого произведения непроективно-евклидовых пространств аффинной связности // Изв. вузов. Математика. 2009. №4. С. 72—77.

6. *Султанов А.Я., Глебова М.В., Болотникова О.В.* Алгебры Ли дифференцирований линейных алгебр над полем // ДГМФ. 2021. Вып. 52. С. 123—136.

Для цитирования: *Глебова М.В., Султанова Г.А.* О максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований прямых произведений более двух пространств аффинной связности первого типа // ДГМФ. 2025. №56. С. 69—82. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-7.

MSC: 53B15

M. V. Glebova[1], G. A. Sultanova[2]
[1] Financial University under the Government of the Russian Federation, Penza branch, 33b, Kalinina Str., Penza, Russia
[2] Logistic Military Educational Institution named after general A. V. Khrulov of the Ministry of Defence of the Russian Federation, 125 Military Town, Penza-5, Russia
[1] mvmorgun@mail.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-7

On the maximal dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type

Submitted on March 28, 2025

In modern differential geometry, one of the main problems of the geometry of a space with a differential-geometric structure is the study of the group of affine transformations (automorphisms) of this space. The studies of automorphisms in various spaces of affine connections are devoted to the works of E. Cartan, P. K. Rashevsky, P. A. Shirokov, I. P. Egorov, A.Ya. Sultanov and other scientists.

Affine conversions in direct products of two spaces with affine connection were considered in the works of M. V. Morgun. In the case of direct products of more than two spaces with affine connection, the question of affine envelopes, these spaces are stable.

In the article Glebova M. V. and Sultanov A.Ya an estimate was obtained for the dimension of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations of spaces with affine connection that represent a direct product of at least three non-projective Euclidean spaces of the special condition. Such spaces are called spaces of the first type.

In this paper, the accuracy of this estimate is proven. To solve the problem, a system of linear homogeneous equations is investigated, which is satisfied by the components of an arbitrary infinitesimal affine transformation.

This system is obtained using the properties of the Lie derivative applied to the tensor field of curvature of the spaces under consideration. An estimate of the rank of this system made it possible to obtain a lower estimate for the rank of the matrix of the original system.

Keywords: direct product of affine connectivity spaces, infinitesimal affine transformations, Lie algebra, dimension of Lie algebra

References

1. *Egorov, I. P.:* Movements in spaces of affine connection. Scientific Notes Penza Pedagogical Institute (1965).

2. *Glebova, M. V., Sultanov, A. Ya.:* On the dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces with affine connection of the first type. DGMF, **55**:2, 70—77 (2024). doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-5.

3. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Fundamentals of differential geometry, Moscow (1981).

4. *Morgun, M. V.:* Infinitesimal affine transformations of the direct product of affine connectivity spaces. PhD thesis. Kazan (2009).

5. *Morgun, M. V.:* Affine transformations of the direct product of non-projective Euclidean spaces of affine connectivity. Izvestia Vuzov. Math., 4, 72—77 (2009).

6. *Sultanov, A. Ya., Glebova, M. V., Bolotnikova, O. V.:* Lie algebras of differentiations of linear algebras over a field. DGMF, 52, 123—136 (2021).

For citation: Glebova, M. V., Sultanova, G. A. On the maximal dimension of Lie algebras of infinitesimal affine transformations of direct products of more than two spaces of affine connection of the first type. DGMF, 56, 69—82 (2025). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-7.