УДК 514.75

В.С. Кальницкий

(*Санкт-Петербургский государственный университет)*

ПОЛНОТА НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

Понятие геометрической однородности оказалось полезным в теории управления и теории устойчивости. Используя это понятие и теорему Пале, мы обобщили теорему Кобаяси и некоторые ранние результаты автора о полиномиальных симметриях геодезического потока старших степеней.

Введение

Конструкция градуированных алгебр Ли однородных тензорных полей относительно векторного поля X_E, т.е. таких X, что $[X_E, X] = mX$ ($m \in \mathrm{Z}$), была предложена Кавским [1]. Он показал, что такой подход может быть очень плодотворным в теории устойчивости. Этот подход был использован Льюисом и Булло [2] в теории управления. Обзор современного состояния этого раздела теории содержится в работе [3]. Мы используем этот подход при решении вопроса о полноте симметрий геодезического потока.

Рассмотрим касательное расслоение TM гладкого многообразия M. На TM естественным образом задается поле дилатации L, или поле Лиувилля, являющееся полным. Его поток задает послойные гомотетии расслоения. Введем пространство однородных относительно L векторных полей:

$$P(TM) = \oplus P_m(TM).$$

Хорошо известно, что $m > -1$ и m-однородные поля в стандартных картах на TM имеют полиномиальные по слоевому аргументу компоненты (A,Q) степеней однородности m и $m+1$, где A — симметричное тензорное поле на M типа $(1, m)$. Если на многообразии задана линейная связность, то каждое пространство P_m можно разложить в прямую сумму пространств P_m^C и P_m^V полных и вертикальных лифтов тензорных полей на многообразии

$$A^C=(A,\delta A - \omega\circ A),\ A^V=(O, A),$$

где δ — внутренний дифференциал, ω — форма связности; $\circ$ — симметризованная свертка полей. Легко вычислить скобку Ли ковариантно постоянных полей в таком разложении. Пусть A и B имеют порядки m и n, тогда

$$[A^C, B^V]= - m(A\circ B)^C,\ [A^C, B^C]=0,$$
$$[A^V, B^V]=(nA\circ B - mB\circ A)^V.$$

Целью этой статьи является описание некоторого класса векторных полей, к которым применима теорема Пале о полноте.

Основной результат

В этой статье мы будем ссылаться на нижеследующий факт (часть теоремы Пале [4]).

Утверждение. *Если набор полных полей порождает конечномерную алгебру Ли, то это алгебра Ли полных полей.*

Рассмотрим тензорное поле типа $(1,1)$, соответствующее тождественному эндоморфизму касательного расслоения. Его вертикальный лифт является полем Лиувилля, а его полный лифт — геодезической пульверизацией $E^C= S$ симметричной линейной связности. Рассмотрим теперь ковариантно постоянное аффинное преобразование (поле Якоби) X на M. Его полный лифт коммутирует с S. Вертикальный лифт является полным как поле с постоянными коэффициентами на слоях. Скобка $[S, X^V]=X^C$ порождает поле X^C, с другой стороны, $[X^C, X^V]=0$. Это означает, что набор из двух полных полей $\{S, X^V\}$ порождает 3-мерную алгебру Ли. По теореме Пале поле Якоби — полное. Конечно, этот результат следует из более сильной теоремы Кобаяси, но мы привели здесь это рассуждение, так как его можно дословно перенести на случай старших степеней однородности.

Поля A, чьи полные лифты коммутируют с пульверизацией, мы также будем называть полями Якоби. Следующие два результата можно найти в работе [5]:

Лемма 1. *Пространство ковариантно постоянных 1-однородных полей Якоби образует алгебру относительно свертки.*

Лемма 2. *Если связность полна, то полными являются все ковариантно постоянные 1-однородные поля Якоби.*

Пусть A — ковариантно постоянное m-однородное поле Якоби (для этого достаточно потребовать $R \circ A=0$, где R — тензор кривизны). Рассмотрим набор $\{S, A^V\}$. В силу описанной структуры $[S, A^V]= - A^C$. Будем генерировать все возможные скобки:

$$[A^C, A^V]= - m(A \circ A)^C;\ [A^C, S]=0;\ [(A \circ A)^C, A^C]=0;$$
$$[(A \circ A)^C, A^V]= - (2m - 1)(A \circ (A \circ A))^C;$$
$$[(A \circ A)^C, S]=(R \circ (A \circ A))^V.$$

Это построение следует продолжать и далее для вновь образованных полей. Мы видим, что этот процесс, вообще говоря, приводит к бесконечному набору полей в разных компонентах однородности, т.е. к бесконечномерному пространству, и никакого вывода о полноте мы сделать не можем. Однако можно явно указать поля, для которых этот процесс конечен. Для этого достаточно, чтобы поле A^V было полным, некоторая сверточная степень поля A была нулевой, а свертка с тензором кривизны должна быть нулевая для любой степени.

Теорема. *Пусть 1-однородное поле A обладает свойствами $\nabla A=0$, $R \circ A=0$, $A^m=0$, и пусть θ — ковариантно постоянная симметричная p-форма. Если связность полна, то полным является поле*

$$Y=(\theta(A^{m-1},\dots,A^{m-1})\otimes A)^C.$$

Доказательство. Нам достаточно доказать полноту указанного поля и описать пространство, порожденное скобками Ли пары полей {S, Y}.

А. Вертикальный лифт описанного тензора является полным на каждом слое касательного расслоения. Действительно, рассмотрим циклический базис, адаптированный к послойному эндоморфизму A. Система о.д.у., связывающих координатные функции $v_\alpha^{(k)}$ $(k=0,\ldots m-1;\ \alpha=1,\ldots,p_m)$, имеет вид

$$\mathrm{v}_\alpha^{(0)}=\mathrm{f}(\mathrm{v}_1^{(m-1)},\ldots,\mathrm{v}_{pm-1}^{(m-1)})\mathrm{v}_\alpha^{(1)},$$
$$\ldots$$
$$\mathrm{v}_\alpha^{(k)}=\mathrm{f}(\mathrm{v}_1^{(m-1)},\ldots,\mathrm{v}_{pm-1}^{(m-1)})\mathrm{v}_\alpha^{(k+1)},$$
$$\ldots$$
$$v_\alpha^{(m-1)}=0,$$

где f — некоторая функция группы последних координат. Эта система явно интегрируется и решения определены на всей числовой оси.

Б. Сверточная степень вычисляется явно:

$$(\theta(A^{m-1},\ldots,A^{m-1})\otimes A)^{\circ s}=\mu(s)\ \theta(A^{m-1},\ldots,A^{m-1})\otimes A^{\circ s},$$

где $\mu(s)$ — некоторые константы. Все эти степени ковариантно постоянны. Более того,

$$R\circ(\theta(A^{m-1},\ldots,A^{m-1})\otimes A)^{\circ s}=\theta(A^{m-1},\ldots,A^{m-1})\otimes(R\circ A^{\circ s})=0.$$

Последнее равенство следует из леммы 1, так как степень поля является полем Якоби. Итак, в силу леммы 2 и проделанных ранее вычислений набор полей $\{S,Y\}$ порождает конечномерную алгебру Ли. Осталось применить теорему Пале.

Работа поддержана ВНП Минобразования РФ 3.1 №4733.

Список литературы

1. *Kawski M.* Geometric homogeneity and its application to stabilization // Proc. IFAC Symp. NCSD. 1995. P. 147—152.

2. *Bullo F., Lewis A.D.* On the homogeneity of the affine connection model for mechanical systems // Proc. IEEE Conf. On Decision and Control. 2000. P. 1260—1265.

3. *Vela P.A., Burdick J.W.* Geometric homogeneity and Configuration controllability of Nonlinear Systems // Proc. IEEE Conf. On Decision and Control. 2002.

4. *Palais R.* A global formulation of the Lie theory of transformation groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1957. №22.

5. *Кальницкий В.С.* Алгебра обобщенных полей Якоби // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1995. Т. 231. С. 222—243.

V. Kalnitsky

THE COMPLETENESS OF NILPOTENT FIELDS

The notion of geometrical homogeneity turned out to be fruitful in the sense of simplification in the Nonlinear Control System Theory and the Theory of Stability. Using this notion and the Palais theorem we extended the Kobayashi theorem and some earlier result of the author on the geodesic flow polynomial symmetries of high orders.

УДК 514.75

М.В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) Z_3 эллиптических цилиндров со специальными свойствами ассоциированных образов. Геометрически охарактеризованы характеристические и фокальные многообразия образующих элементов изучаемых комплексов. Получены геометрические свойства многообразий, дающие возможность в дальнейшем сконструировать их.

Рассмотрим в трехмерном аффинном пространстве комплекс (трехпараметрическое семейство) Z_3 эллиптических цилиндров q. Отнесем комплекс к реперу $r=\{A,\bar{e}_i\}$, $i,j,k=\overline{1,3}$, где A − центр луча прямолинейной конгруэнции Z_2 осей цилиндра; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ лежат в касательной плоскости S к