УДК 514.764

***С. Е. Степанов*[1], *И. И. Цыганок*[2]**

[1, 2] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Россия*

[1, 2] s. e.stepanov@mail.ru

[1] ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1734-8874

[2] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9186-3992

doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-16

# Теоремы исчезновения для тензоров Киллинга и Кодацци высшего порядка

Каждый симметричный бесследовый тензор Киллинга ранга $p \geq 2$ будет параллельным на полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны, если его норма является $L^q$-функцией для некоторого $q > 0$. Если при этом многообразие имеет бесконечный объем, то подобный тензор Киллинга равен нулю. Каждый бесследовый тензор Кодацци ранга $p \geq 2$ равен нулю на полном некомпактном односвязном римановом многообразии неотрицательной секционной кривизны, если его норма является $L^q$-функцией для некоторого $q \geq 1$.

***Ключевые слова***: полное риманово многообразие, тензоры Киллинга и Кодацци, теорема исчезновения.

## Введение

В статье [1] нами были рассмотрены симметрические тензоры Кодацци и Киллинга ранга $p \geq 2$ на компактном римановом многообразии и доказаны для них «теоремы исчезновения». Условия препятствия для существования подобных тензоров выражались в виде положительной и, соответственно, отрицательной определенности оператора кривизны риманова

---

*Поступила в редакцию 31.01.2019 г.*

многообразия (см. определение в [2, с. 76]). Позднее в работах [3; 4] для тензора Киллинга ранга $p \geq 2$ была доказана аналогичная нашей «теорема исчезновения», где условие препятствия выражалось в виде знакоопределенности секционной кривизны многообразия. В настоящей статье мы докажем «теоремы исчезновения» для симметрических тензоров Кодацци и Киллинга ранга $p \geq 2$ на полных римановых многообразиях и тем самым обобщим результаты из [1; 3; 4].

## 1. **Основные определения и уравнения**

Пусть $M$ будет $n$-мерным ($n \geq 2$) $C^{\infty}$-многообразием с линейной связностью $\nabla$ без кручения. Рассмотрим $\mathrm{C}^{\infty}M$-модуль $\mathrm{Diff}\left(S^pM, T^*M \otimes S^pM\right)$ линейных дифференциальных операторов первого порядка, заданных на пространстве $C^{\infty}$-сечений $C^{\infty}S^pM$ расслоения ковариантных симметрических $p$-тензоров $S^pM$ для произвольного целого $p \geq 2$. Оператор $D \in \mathrm{Diff}\left(S^pM, T^*M \otimes S^pM\right)$ называется *фундаментальным* [5, докл. XVI], если его главный символ относительно связности $\nabla$ является проектором на поточечно $GL(n, \mathbb{R})$-неприводимое подрасслоение в $T^*M \otimes S^pM$. В [6] доказано, что такими операторами будут $D_1 = (p+1)^{-1}\delta^*$ и $D_2 = \nabla - (p+1)^{-1}\delta^*$, где $\delta^* : \mathrm{C}^{\infty}S^pM \to \mathrm{C}^{\infty}S^{p+1}M$ является композицией ковариантной производной с симметризацией (см. определение в [2, п. 1.59]). Ядром первого оператора $D_1$ служат *киллинговы*, а второго $D_2$ — *кодаццевы* $p$-тензоры. Геометрия таких тензоров на многообразии $M$ с линейной связностью $\nabla$ без кручения изучена в [6].

Если $M$ снабжено метрическим тензором $g$, то для $\delta^*$ можно определить формально сопряженный к нему оператор

$\delta : \mathrm{C}^{\infty} S^{p+1} M \to \mathrm{C}^{\infty} S^{p} M$, называемый *дивергенцией* (см. [2, п. 1.59]). Тогда на римановом многообразии $(M, g)$ бесследовые $p$-тензоры Киллинга и Кодацци являются бездивергентными.

Для $p$-тензора Кодацци имеет место следующая *формула Вейтценбёка* [7]:

$$\tfrac{1}{2} \Delta \| T \|^2 = Q_p (T) + \| \nabla T \|^2, \tag{1}$$

где $Q_p : S^p(T_x M) \times S^p(T_x M) \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма в любой точке $x \in M$, ее коэффициентами служат компоненты тензоров Риччи и кривизны многообразия $(M, g)$. Правую часть формулы (1) представим в виде

$$\tfrac{1}{2} \Delta \| T \|^2 = \| T \| \Delta \| T \| + \big\| \nabla \| T \| \big\|, \tag{2}$$

где согласно *неравенству Като* $\| \nabla T \|^2 \geq \big\| \nabla \| T \| \big\|$. В результате из (1) последует неравенство

$$\| T \| \Delta \| T \| \geq Q_p (T). \tag{3}$$

Аналогично (1) выводится *формула Вейтценбёка* и для бесследового $p$-тензора Киллинга $T$:

$$\tfrac{1}{2} \Delta \| T \|^2 = -p\, Q_p (T) + \| \nabla T \|^2. \tag{4}$$

Здесь рассуждения, аналогичные проведенным выше, позволяют заключить, что справедливо неравенство

$$\| T \| \Delta \| T \| \geq -p\, Q_p (T). \tag{5}$$

## 2. Две теоремы исчезновения

В статье [8, p. 388] была доказана формула

$$Q_2 (T) = \sum_{i \neq j} \sec \left( e_i \wedge e_j \right) \left( T_{ii} - T_{jj} \right) \tag{6}$$

для ортонормированного базиса $\{e_i\}$ пространства $T_xM$ в произвольной $x \in M$ такого, что $T_x(e_i, e_j) = T_{ii}(x)\delta_{ij}$ для символа Кронекера $\delta_{ij}$, и секционной кривизны $\sec(e_i \wedge e_j)$ в направлении подпространства $\pi(x) = span\{e_i, e_j\}$ из $T_xM$. На основании (6) заключаем, что знак секционной кривизны $(M, g)$ порождает знакоопределенность формы $Q_2(T)$.

В качестве обобщения сказанного выше в статье [4] было доказано, что если секционная кривизна многообразия $(M, g)$ неположительная, то $Q_p(T) \le 0$ для всех $p \ge 2$. При этих требованиях из (5) последует неравенство $\Delta\|T\| \ge 0$, которое означает, что $\|T\|$ является неотрицательной *субгармонической функцией* для бесследового $p$-тензора Киллинга $T$. Из [10] известно, что на односвязном полном римановом многообразии $(M, g)$ неположительной секционной кривизны каждая неотрицательная субгармоническая функция является постоянной, если $f \in L^q(M, g)$ для любого $q \in (0, \infty)$. В нашем случае на таком многообразии будем иметь $\|T\| = const$, если потребовать, чтобы $\|T\| \in L^q(M, g)$. Тогда из (1) последует, что $\nabla T = 0$. Если $(M, g)$ имеет бесконечный объем, то будет выполняться тождество $\|T\| \equiv 0$. Доказана следующая

**Теорема 1**. *На односвязном полном римановом многообразии* $(M, g)$ *неположительной секционной кривизны каждый бесследовый p-тензор Киллинга* $T$ *является параллельным, если* $\|T\| \in L^q(M, g)$ *хотя бы для одного* $q \in (0, \infty)$. *Если при этом многообразие* $(M, g)$ *имеет бесконечный объем, то* $T \equiv 0$.

Пусть секционная кривизна многообразия $(M, g)$ неотрицательная, тогда $Q_p(T) \ge 0$ для любого $p \ge 2$ [8]. При этих требованиях из (5) последует неравенство $\Delta \| T \| \geq 0$. Из [11] известно, что на односвязном полном многообразии $(M, g)$ неотрицательной секционной кривизны либо $\int_M f \, dv_g < +\infty$, либо $f \equiv 0$ для каждой неотрицательной субгармонической функции $f$. Более того, для $q \neq 1$ выполняется либо $\int_M f^q \, dv_g < +\infty$, либо $f = C = const$ [12]. Пусть $f \in L^q(M, g)$, тогда $\int_M f^q \, dv_g = C^q \int_M dv_g < +\infty$. Напомним, что полное некомпактное многообразие $(M, g)$ неотрицательной секционной кривизны имеет бесконечный объем [11]. Это вступает в противоречие с последним неравенством, а потому $f \equiv 0$. Справедлива

**Теорема 2**. *Односвязное полное некомпактное риманово многообразие $(M, g)$ неотрицательной секционной кривизны не допускает ненулевого бесследового p-тензора Кодацци T такого, что $\| T \| \in L^q(M, g)$ хотя бы для одного $q \in (0, \infty)$.*

### *Список литературы*


1. *Степанов С.Е.* Поля симметрических тензоров на компактном римановом многообразии // Матем. заметки. 1992. Т. 52, №4. С. 85—88.
2. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М., 1990.
3. *Dairbekov N.S., Sharafudinov V.A.* On conformal Killing symmetric tensor fields on Riemannian manifolds // Sibirian Advaces in Mathematics. 2011. Vol. 21, №1. P. 1—41.
4. *Heil K., Moroianu A., Semmelmann U.* Killing and conformal Killing tensors // Journal of Geometry and Physics. 2016. Vol. 106. P. 383—400.
5. *Бессе А.* Четырехмерная риманова геометрия. М., 1985.
6. *Степанов С.Е., Смольникова М.В.* Фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка на внешних и симметрических формах // Изв. вузов. Математика. 2002. Т. 11. С. 55—60.
7. *Shandra I.G., Stepanov S.E.* On higher order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds. arXiv:1803.03956v2.

8. *Berger M., Ebin D.* Some decomposition of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold // Journal of Differential Geometry. 1969. Vol. 3. P. 379—392.

9. *Bettiol R. G., Mendes R. A. E.* Sectional curvature and Weitzenböck formulae. arXiv:1708.09033v1.

10. *Li P., Shoen R.* $L^p$ and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds // Acta Mathematica. 1984. Vol. 153, № 1. P. 279—301.

11. *Greene R. E., Wu H.* Integrals of subharmonic functions on manifolds of negative curvature // Inventiones Math. 1974. Vol. 27. P. 265—298.

12. *Yau S. T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. 1976. Vol. 25, № 7. P. 659—679.

*S. Stepanov*[1], *I. Tsyganok*[2]

[1, 2] *Financial University under the Government of the Russian Federation*
*49 Leningradsky Prospect, Moscow, 125993, Russia*
[1, 2] s.e.stepanov@mail.ru
[1] ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1734-8874
[2] ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9186-3992
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-16

## Vanishing theorems for higher-order Killing and Codazzi

Submitted on January 31, 2019

A Killing $p$-tensor (for an arbitrary natural number $p \geq 2$) is a symmetric $p$-tensor with vanishing symmetrized covariant derivative. On the other hand, Codazzi $p$-tensor is a symmetric $p$-tensor with symmetric covariant derivative. Let $M$ be a complete and simply connected Riemannian manifold of nonpositive (resp. non-negative) sectional curvature. In the first case we prove that an arbitrary symmetric traceless Killing $p$-tensor is parallel on $M$ if its norm is a $L^q$-function for some $q > 0$. If in addition the volume of this manifold is infinite, then this tensor is equal to zero. In the second case we prove that an arbitrary traceless Codazzi $p$-tensor is equal to zero on a noncompact manifold $M$ if its norm is a $L^q$-function for some $q \geq 1$.

*Keywords*: complete Riemannian manifold, Killing and Codazzi tensors, vanishing theorem.

*References*

1. *Stepanov, S.E.:* Fields of symmetric tensors on a compact Riemannian manifold. Math. Notes, **52**:4, 1048—1050 (1992).

2. *Besse, A.:* Einstein manifolds. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1987).

3. *Dairbekov, N.S., Sharafudinov, V.A.*: On conformal Killing symmetric tensor fields on Riemannian manifolds. Sibirian Advaces in Mathematics. **21**:1, 1—41 (2011).

4. *Heil, K., Moroianu, A., Semmelmann, U.*: Killing and conformal Killing tensors. Journal of Geometry and Physics. 106, 383—400 (2016).

5. *Géométrie* Riemannienne en dimension 4: Seminaire Arthur Besse, Cedic — Fernand Nathan, Paris (1981).

6. *Stepanov, S.E., Smol'nikova, M.V.:* Fundamental first-order differential operators on exterior and symmetric forms. Russian Math., **46**:11, 51—56 (2003).

7. *Shandra, I.G., Stepanov, S.E.*: On higher order Codazzi tensors on complete Riemannian manifolds. arXiv:1803.03956v2.

8. *Berger, M., Ebin, D.*: Some decomposition of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold. Journal of Differential Geometry, 3, 379—392 (1969).

9. *Bettiol, R.G., Mendes, R.A.E.*: Sectional curvature and Weitzenböck formulae. arXiv:1708.09033v1.

10. *Li, P., Shoen, R.:* $L^p$ and mean value properties of subharmonic functions on Riemannian manifolds. Acta Mathematica, **153**:1, 279—301 (1984).

11. *Greene, R.E., Wu, H.*: Integrals of subharmonic functions on manifolds of negative curvature. Inventiones Math., 27, 265—298 (1974).

12. *Yau, S.T.:* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry. Indiana Univ. Math. J., **25**:7, 659—679 (1976).