7. *Кретов М.В.* О главных точках дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 51—58.

M. Kretov

Differential mapping generated by complexes of cones

In three-dimensional equiaffine space we consider differentiable mapping generated by complexes of cones with special properties of associated images. Indicatrix and the main direction of the investigated mapping, characteristic and focal manifold for the forming element of the complex are geometrically characterized.

УДК 514.75

А. В. Кулешов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

О внутреннем оснащении одного семейства гиперплоских элементов

В многомерном проективном пространстве рассматривается семейство $B_{p,q}$ гиперплоских элементов. Ставится задача построения внутреннего оснащения данного семейства. Эта задача решается в случае семейства специального вида. Решение основано на методе подвижного репера и исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана.

Ключевые слова: проективное пространство, гиперплоский элемент, семейство гиперплоских элементов, проективно-дифференциальная геометрия, оснащение, метод внешних форм, расслоение реперов, редукция расслоения реперов.

1. Уравнения семейства $B_{p,q}$

Пусть P_N — N-мерное проективное пространство ($N \geq 4$), P_N^* — двойственное к нему. Гиперплоским элементом пространства P_N (см.: [1]) называется пара $L_{N-1}^* = (L_{N-1}, A)$, где L_{N-1} — гиперплоскость, A — точка, лежащая в L_{N-1} (она называется центром элемента L_{N-1}^*). Пусть B — гладкое семейство гиперплоских элементов. Определим два отображения $\xi : B \to P_N^*$ и $\eta : B \to P_N$ следующим образом: $\xi : (L_{N-1}, A) \to L_{N-1}$, $\eta : (L_{N-1}, A) \to A$.

Семейством $B_{p,q}$ назовем семейство B, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\eta(B_{p,q})$ — гладкая p-мерная поверхность S_p ($p < N-2$);

2) проекция $\eta : B_{p,q} \to S_p$ является расслоением над S_p с q-мерными слоями ($1 \leq q < N - p - 1$);

3) касательная плоскость $T_A(S_p)$ лежит в плоскости L_{N-1} каждого элемента $(L_{N-1}, A) \in \eta^{-1}(A)$.

Пусть $V(B_{p,q})$ — огибающая гладкого семейства $\xi(B_{p,q})$. Характеристикой $F_r(L_{N-1}^*)$ назовем плоскую образующую семейства огибающей $V(B_{p,q})$. Семейство $B_{p,q}$ назовем регулярным, если для любого его элемента $L_{N-1}^* \in B_{p,q}$ выполняется условие: $F_r(L_{N-1}^*) \cap T_A(S_p) = A$, где $A = \eta(L_{N-1}^*)$. В этом случае размерность характеристики равна $r = N - p - q - 1$.

Следуя работе [2], дадим аналитическое описание семейства $B_{p,q}$. Отнесем пространство P_N к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ с деривационными формулами [2, с. 71], в которых структурные формы ω^I, ω_J^I, ω_I проективной группы $GP(N)$ удовлетворяют уравнениям Э. Картана. Разобьем индекс I на четыре серии: $I = \{i, u, y, N\}$, причем

$$i, j, ... = \overline{1, p}\,;\ u, v, \ldots = \overline{p+1, p+q}\,;\ y = \overline{p+q+1, N-1}\,.$$

Над семейством $B_{p,q}$ как над базой возникает расслоение $\Re(B_{p,q})$ проективных реперов, адаптированных семейству таким образом, что каждый репер { A_0, A_i, A_u, A_y, A_N }, принадлежащий слою над элементом $L_{N-1}^* = (L_{N-1}, A)$, удовлетворяет условиям: $A_0 = A$, $A_i \in T_A(S_p)$, $A_u \in L_{N-1}$, $A_y \in F_r(L_{N-1}^*)$. Уравнения семейства $B_{p,q}$ в адаптированном репере имеют вид

$$\omega^u = 0\,,\ \omega^y = 0\,,\ \omega^N = 0\,,\ \omega_y^N = 0\,,$$

$$\omega_i^u = \Lambda_{ij}^u \theta^j\,,\ \omega_i^y = \Lambda_{ij}^y \theta^j\,,\ \omega_i^N = \Lambda_{ij}^N \theta^j\,,$$

$$\omega_y^u = \Lambda_{yi}^u \theta^i + \Lambda_{yN}^{uv} \theta_v^N\,,\ \omega_y^i = \Lambda_{yj}^i \theta^j + \Lambda_{yN}^{iu} \theta_u^N\,,$$

где $\theta^i = \omega^i$, $\theta_u^N = \omega_u^N$ — базисные формы семейства, определяющие смещение текущего элемента L_{N-1}^*, а совокупность функций

$$\Lambda = \{\Lambda_{ij}^u, \Lambda_{ij}^y, \Lambda_{ij}^N, \Lambda_{yi}^u, \Lambda_{yN}^{uv}, \Lambda_{yj}^i, \Lambda_{yN}^{iu}\}$$

образует фундаментальный объект 1-го порядка многообразия $B_{p,q}$, уравнения на компоненты которого запишем в виде сравнений по модулю базисных форм (см.: [2, с. 75]):

$$\Delta\Lambda_{ij}^u + \Lambda_{ij}^N \omega_N^u \equiv 0\,,\ \Delta\Lambda_{ij}^y + \Lambda_{ij}^u \omega_u^y + \Lambda_{ij}^N \omega_N^y \equiv 0\,,\ \Delta\Lambda_{ij}^N \equiv 0\,, \quad (1.1)$$

$$\Delta\Lambda_{yi}^u - \Lambda_{yN}^{uv} \Theta_{vi}^N \equiv 0\,,\ \Delta\Lambda_{yN}^{uv} \equiv 0\,, \quad (1.2)$$

$$\Delta\Lambda^i_{yj}+\Lambda^u_{yj}\omega^i_u-\Lambda^{iu}_{yN}\Theta^N_{uj}-\delta^i_j\omega_y\equiv 0,\ \Delta\Lambda^{iu}_{yN}+\Lambda^{vu}_{yN}\omega^i_v\equiv 0, \quad (1.3)$$

где, например,

$$\Delta\Lambda^N_{ij}=d\Lambda^N_{ij}+\Lambda^N_{ij}\omega^N_N-\Lambda^N_{kj}\omega^k_i-\Lambda^N_{ik}\omega^k_j,$$

а формы Θ^N_{ui} имеют вид $\Theta^N_{ui}=-\Lambda^N_{ji}\omega^j_u$. При этом $\Lambda^u_{[ij]}=0$, $\Lambda^y_{[ij]}=0$, $\Lambda^N_{[ij]}=0$. Из сравнений (1.1), (1.2) в частности видно, что подобъекты $\{\Lambda^N_{ij}\}$ и $\{\Lambda^{uv}_{yN}\}$ объекта Λ являются тензорами. В силу регулярности семейства $B_{p,q}$

$$\Delta_1\overset{def}{=}\det\left\|\Lambda^N_{ij}\right\|\neq 0. \quad (1.4)$$

При этом можно ввести в рассмотрение обратный тензор V^{ij}_N:

$$V^{ik}_N\Lambda^N_{kj}=\delta^i_j,\ \Delta V^{ik}_N\equiv 0. \quad (1.5)$$

Уравнения на компоненты тензора Λ^N_{ij} и его пфаффовы производные Λ^N_{ijk} имеют, соответственно, вид [2, с. 74]

$$\Delta\Lambda^N_{ij}=\Lambda^N_{ijk}\theta^k-\Lambda^u_{ij}\theta^N_u,$$

$$\Delta\Lambda^N_{ijk}-3\Lambda^N_{(ij}\Lambda^N_{k)s}\omega^s_N-3\Lambda^N_{(ij}\omega_{k)}-3\Lambda^u_{(ij}\Lambda^N_{k)s}\omega^s_u\equiv 0. \quad (1.6)$$

2. Относительный инвариант D_N

Рассмотрим величины

$$\Lambda^u_N=\frac{1}{p}\Lambda^u_{jk}V^{jk}_N,\ \Lambda^y_N=\frac{1}{p}\Lambda^y_{jk}V^{jk}_N,\ \Lambda_k=\frac{1}{p+2}\Lambda^N_{ijk}V^{ij}_N, \quad (2.1)$$

$$D^N_{ijk}=\Lambda^N_{ijk}-3\Lambda^N_{(ij}\Lambda_{k)},\ D_k=D^N_{ijk}V^{ij}_N,\ D_N=V^{ij}_N D_i D_j. \quad (2.2)$$

Сравнения на них с учетом (1.1), (1.5) и (1.6) имеют вид (ср.: [2, с.76])

$$\Delta\Lambda_N^u + \omega_N^u \equiv 0\,,\ \Delta\Lambda_N^y + \Lambda_N^u\omega_u^y + \omega_N^y \equiv 0\,. \tag{2.3}$$

$$\Delta\Lambda_k \equiv (\Lambda_{ks}^N\omega_N^s - \omega_k) + M_{ks}^u\omega_u^s\,, \tag{2.4}$$

$$\Delta D_{ijk}^N \equiv 3M_{ijks}^{uN}\omega_u^s\,,\ \Delta D_k \equiv 0\,,\ dD_N - D_N\omega_N^N \equiv 0\,, \tag{2.5}$$

где

$$M_{ks}^u = \frac{1}{p+2}(p\Lambda_N^u\Lambda_{ks}^N + 2\Lambda_{ks}^u)\,,\ M_{ijks}^{uN} = \Lambda_{(ij}^u\Lambda_{k)s}^N - \Lambda_{(ij}^N M_{k)s}^u\,.$$

Таким образом, объект D_N является относительным инвариантом. Из (2.5) имеем

$$d\ln D_N - \omega_N^N = B_i\theta^i + B_N^u\theta_u^N\,. \tag{2.6}$$

Продолжая (2.6), получаем сравнения на величины B_i, B_N^u:

$$\Delta B_i + \omega_i + \Lambda_{ij}^N(\omega_N^j + B_N^u\omega_u^j) \equiv 0\,,\ \Delta B_N^u - \omega_N^u \equiv 0\,. \tag{2.7}$$

3. Частичная канонизация репера семейства $B_{p,\,N-p-2}$

Далее ограничимся рассмотрением семейств $B_{p,\,N-p-2}$. Для них индекс y принимает всего одно значение $y = N-1$, вследствие чего функции Λ_{yN}^{uv} образуют квадратную матрицу порядка $q = N-p-2$. Обозначим через Δ_2 ее определитель. Сравнение на Δ_2 имеет вид $d\Delta_2 \equiv \Delta_2\Theta$, где $\Theta = q(\omega_u^u + \omega_N^N) - 2\omega_u^u$, откуда видно, что Δ_2 — относительный инвариант. Далее ограничимся случаем

$$\Delta_2 \neq 0\,. \tag{3.1}$$

Частичную канонизацию репера осуществим в три этапа.

Этап 1. Придадим нулевые значения величинам:

$$\Lambda^u_N = 0, \quad \Lambda^y_N = 0, \quad \Lambda^{iu}_{yN} = 0 .$$

Тогда из (1.3), (2.4) с учетом (3.1) получим, что столько же структурных форм стали главными (т. е. сравнимыми с нулем по модулю базисных форм):

$$\omega^u_N \equiv 0, \quad \omega^y_N \equiv 0, \quad \omega^i_u \equiv 0 . \qquad (3.2)$$

В соответствии с леммой Остиану [3] произведена частичная канонизация репера. Разложим формы (3.2) по базисным формам семейства:

$$\omega^u_N = \Lambda^u_{Ni}\theta^i + \Lambda^{uv}_{NN}\theta^N_v , \ \omega^y_N = \Lambda^y_{Ni}\theta^i + \Lambda^{yv}_{NN}\theta^N_v , \qquad (3.3)$$

$$\omega^i_u = \Lambda^i_{uj}\theta^j + \Lambda^{iv}_{uN}\theta^N_v .$$

Дифференцируя (3.3) внешним образом с последующим разрешением по лемме Картана, получим сравнения на коэффициенты при базисных формах

$$\Delta\Lambda^u_{Ni} + \Lambda^u_{ji}\omega^j_N \equiv 0 , \ \Delta\Lambda^{uv}_{NN} \equiv 0 ,$$

$$\Delta\Lambda^y_{Ni} - \Lambda^y_{ji}\omega^j_N + \Lambda^u_{Ni}\omega^y_u \equiv 0 , \ \Delta\Lambda^{yu}_{NN} + \Lambda^{vu}_{NN}\omega^y_v \equiv 0 . \qquad (3.4)$$

Откуда следует, что Λ^{uv}_{NN} — тензор. Обозначим через Δ_3 определитель квадратной матрицы $\left\|\Lambda^{uv}_{NN}\right\|$. Сравнение на Δ_3 имеет вид $d\Delta_3 \equiv 2\Delta_3(q\omega^N_N - \omega^u_u)$. Таким образом, Δ_3 — относительный инвариант. Далее ограничимся рассмотрением случая, когда он отличен от нуля:

$$\Delta_3 \neq 0 . \qquad (3.5)$$

С учетом проведенной канонизации сравнения (2.4), (2.5), (2.7) упростятся:

$$\Delta\Lambda_i - \Lambda^N_{ij}\omega^j_N + \omega_i \equiv 0 , \ \Delta D^N_{ijk} \equiv 0 , \ \Delta B_i + \omega_i + \Lambda^N_{ij}\omega^j_N \equiv 0 . \ (3.6)$$

Этап 2. Полагая $\Lambda_i = 0$, $B_i = 0$, $\Lambda^{yv}_{NN} = 0$, из (3.4), (3.6) получим $\omega_i \equiv 0$, $\Lambda^N_{ij}\omega^j_N \equiv 0$, $\Lambda^{vu}_{NN}\omega^y_v \equiv 0$, откуда в силу (1.4), (3.5) имеем

$$\omega_i \equiv 0,\ \omega^i_N \equiv 0,\ \omega^y_u \equiv 0. \qquad (3.7)$$

Этап 3. С учетом (3.2) и (3.7) имеем

$$\Delta\Lambda^i_{yj} - \delta^i_j\omega_y \equiv 0,\ \Delta\Lambda^i_{Nj} - \delta^i_j\omega_N \equiv 0. \qquad (3.8)$$

Тогда объекты

$$a_u = \Lambda^i_{ui},\ a_y = \Lambda^i_{yi},\ a_N = \Lambda^i_{Ni}$$

являются квазитензорами, поскольку

$$\Delta a_u - p\omega_u \equiv 0,\ da_y - a_y\omega^y_y - p\omega_y \equiv 0, da_N - a_N\omega^N_N - p\omega_N \equiv 0. \quad (3.9)$$

Положим $a_u = 0$, $a_y = 0$, $a_N = 0$. Тогда из (3.9) получим $\omega_u \equiv 0$, $\omega_y \equiv 0$, $\omega_N \equiv 0$. В соответствии с леммой Остиану произведена частичная канонизация репера.

В итоге все формы, кроме ω^i_j, ω^u_v, ω^y_z, ω^N_N, стали главными. Это означает, что линейные оболочки следующих совокупностей точек стали инвариантными плоскостями следующей пятичленной композиции, присоединенной к текущему элементу семейства:

$$C \oplus N_{p-1} \oplus N_{q-1} \oplus A_y \oplus A_N = P_N, N_{p-1} = [A_i],\ N_{q-1} = [A_u]. \quad (3.10)$$

Таким образом, доказана

Теорема. *К семейству $B_{p,N-p-2}$, подчиняющемуся условиям (1.4), (3.1) и (3.5), внутренним образом присоединяется оснащение, состоящее из полей плоскостей и точек (3.10), дополняющих центр A до пространства P_N.*

Список литературы

1. *Бочилло Г.П.* К дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 18—23.

2. *Кулешов А.В.* Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров // Там же. 2013. Вып. 44. С. 69—77.

3. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. T. 7, №2. С. 231—240.

A. Kuleshov

About intrinsic clothing of some family of hyperplane elements

In multidimensional projective space a family $B_{p,q}$ of hyperplane elements is considered. The problem of construction of intrinsic clothing of such a family is set. This problem is solved in a special case. The solution is based on the method of moving frames and calculation of exterior differential forms of E. Cartan.

УДК 574.76

В.С. Малаховский
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Поля геометрических объектов n-параметрического семейства a_n оснащенных центроаффинных преобразований

Исследуются поля геометрических объектов [1] n-параметрического семейства a_n аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства a_n, каждое из которых сохраняет пару точек {A, B} и однозначно характеризуется заданием этих точек. Установлено существование последовательности p-ковариантных симметрических тензоров [2], порожденных семейством a_n и последовательности n-мерных многообразий гиперконусов порядка p ($p \in N$).

Ключевые слова: геометрический объект, аффинное преобразование, вектор, p-ковариантный тензор, гиперконус.