4. *Левичев А.В.* Однородная хроногеометрия. 1. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991. 52 с.

A. Dolgarev

THE NETWORK EQUATIONS OF 3-DIMENSIONAL SOLVABLE ODULES OF LIE

The equations circumscribing 3-dimensional solvable odules of Lie and mapping exp of Lie algebras in rastran and sibson are obtained.

УДК 514.764.25

Т.В. Зудина, С.Е. Степанов
(Владимирский государственный педагогический университет)

ЭКВИАФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Рассматриваются эквиаффинные отображения псевдоримановых многообразий. На основе теории представлений групп дается классификация такого рода отображений. Описывается геометрия двух из выделенных семи классов. В частности, найдены необходимые и достаточные условия существования эквиаффинных диффеоморфизмов и вид метрик римановых многообразий, допускающих такие отображения.

§1. Семь классов эквиаффинных диффеоморфизмов

1.1. Рассмотрим два n-мерных C^{∞}-псевдоримановых многообразия (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$. В локальных системах координат $x^1,...,x^n$ и $\overline{x}^1,...,\overline{x}^n$ элементы объемов многообразий (M, g)

и $(\overline{M},\overline{g})$ задаются, соответственно, равенствами $dV_g = \sqrt{|\det g|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ и $dV_{\overline{g}} = \sqrt{|\det \overline{g}|}d\overline{x}^1 \wedge ... \wedge d\overline{x}^n$.

Диффеоморфное отображение $f : M \to \overline{M}$ называется *эквиобъемным*, если $dV_g = f^* dV_{\overline{g}}$ для отображения f^* – транспонированного дифференциалу $df : TM \to T\overline{M}$ отображения $f : M \to \overline{M}$. Локально диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ может осуществляться по принципу равенства координат $\overline{x}^1 = x^1,..., \overline{x}^n = x^n$ в соответствующих точках $\overline{x} = f(x)$ для $x \in M$ (см. [1, с. 67]). В этом случае говорят, что (см. [2, с. 47]) многообразия (M,g) и $(\overline{M},\overline{g})$ отнесены к общей по отношению к данному отображению $f : M \to \overline{M}$ системе локальных координат $x^1,...,x^n$.

Обозначим через g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$ компоненты метрических тензоров g и $\overline{g}$, а через Γ_{ij}^k и $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ – символы Кристоффеля связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ псевдоримановых многообразий (M,g) и $(\overline{M},\overline{g})$ по отношению к общей по отображению $f : M \to \overline{M}$ системе локальных координат $x^1,...,x^n$; тогда из условия эквиобъемности отображения $\sqrt{|\det(\overline{g}_{ij})|} = \sqrt{|\det(g_{ij})|}$ путем ковариантного дифференцирования левой и правой частей равенства выводим

$$\partial_j \ln\sqrt{|\det \overline{g}_{ij}|} - \partial_j \ln\sqrt{|\det g_{ij}|} = \overline{\Gamma}_{kj}^k - \Gamma_{kj}^k = T_{kj}^k = 0, \qquad (1.1)$$

где $T_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$ – компоненты тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ связности Леви-Чивита ∇ многообразия (M,g) при отображении $f : M \to \overline{M}$ (см. [2, с. 71]).

Равенства (1.1) служат необходимым, но не достаточным условием того, что отображение $f : M \to \overline{M}$ будет эквиобъемным, поскольку из (1.1) следует

$$\sqrt{|\det \overline{g}|} = \lambda \sqrt{|\det g|} \qquad (1.2)$$

для некоторого постоянного $\lambda > 0$. Отображение $f : M \to \overline{M}$, удовлетворяющее условиям (1.1) или равносильному им условию (1.2), назовем *эквиаффинным*. Попутно заметим, что *аффинное отображение* (см. [3]) выделяется условиями $T_{ij}^k = \overline{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = 0$.

1.3. Рассмотрим пространство $\mathrm{T}(E) = \left\{\tilde{T} \in E^* \otimes S^2 E \,\middle|\, \tilde{T}_{12}(c) = 0\right\}$, где E – векторное m-мерное псевдоевклидово пространство, $\tilde{T}_{12}(c) = \sum_{k=1}^{m} \tilde{T}(c_k,\ e_k,\ e)$ для ортонормированного базиса $\{e_1,\ ...,\ e_m\}$ и произвольного c из E. Согласно [4] тензорное пространство $\mathrm{T}(E)$ разлагается в сумму трех неприводимых относительно действия ортогональной группы $O(n)$ подпространств:

$$\mathrm{T}_1(E) = \left\{\tilde{T} \in \mathrm{T}(E) \,\middle|\, \tilde{T}(a,b,c) = \tilde{T}(b,a,c)\right\};$$

$$\mathrm{T}_2(E) = \left\{\tilde{T} \in \mathrm{T}(E) \,\middle|\, \tilde{T}(a,b,c) + \tilde{T}(b,c,a) + \tilde{T}(c,a,b) = 0\right\};$$

$$\mathrm{T}_3(E) = \left\{\tilde{T} \in \mathrm{T}(E) \,\middle|\, \tilde{T}(a,b,c) = \left(m^2 + m - 2\right)^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left[(m+1)\tilde{T}_{12}(a)q(b,c) - \tilde{T}_{12}(b)q(a,c) - \tilde{T}_{12}(c)q(a,b)\right]\right\}.$$

Тензорное поле $\tilde{T}$ с локальными компонентами $T_{kij} = g_{kl} T_{ij}^l$ на $(M,\ g)$ является сечением векторного расслоения $\mathrm{T}(TM)$, слой которого в каждой точке – пространство $T(E)$. Следствием этого будет поточечное разложение $\tilde{T}$ в сумму тензорных полей, соответствующих неприводимым компонентам действия группы $O(n)$. Этому разложению $\tilde{T}$ отвечает «грубая» классификация эквиаффинных диффеоморфизмов, когда к одному классу мы отнесем диффеоморфизмы, для которых $\tilde{T}$ – сечение одного из инвариантных подрасслоений $\mathrm{T}_1(TM)$, $\mathrm{T}_2(TM)$ и $\mathrm{T}_3(TM)$ или их прямых сумм.

Определение. *Эквиаффинный диффеоморфизм f псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ со связностью Леви-Чивита ∇ на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\ \overline{g})$ со связностью Леви-Чивита $\overline{\nabla}$ принадлежит классу J, когда в каждой точке $x \in M$ тензор поля $\tilde{T}$ принадлежит подпространству $\mathrm{J}(T_x M)$ тензорного пространства $\mathrm{T}(T_x M)$.*

Пополним список классов еще одним, для которого $\tilde{T}$ является сечением подрасслоения $\mathrm{T}_1(TM) \cap \mathrm{T}_2(TM) \cap \mathrm{T}_3(TM)$, т. е. когда $\tilde{T} = 0$. Справедлива

Теорема 1.2. *Инвариантным образом выделяются семь классов эквиаффинных диффеоморфизмов $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\ \overline{g})$, для каждого из которых поле $\tilde{T}$ является сечением соответствующего инвариантного подрасслоения $\mathrm{T}_1(TM)$, $\mathrm{T}_2(TM)$, $\mathrm{T}_3(TM)$, $\mathrm{T}_1(TM) \cap \mathrm{T}_2(TM) \cap \mathrm{T}_3(TM)$ или одной из их прямых сумм.*

§2. Геометрия двух классов эквиаффинных диффеоморфизмов

2.1. Изучим первые два класса гармонических диффеоморфизмов. Пусть $f \in \mathrm{J}_1$. Это означает, что компоненты тензорного поля g подчиняются дифференциальным уравнениям вида

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = -T_{ijk} - T_{jik} \tag{2.1}$$

при условии, что

$$T_{ijk} = T_{jik}\ ;\ T_{ik}^{k} = 0\,. \tag{2.2}$$

Из условий (2.2) заключаем, что $g^{ij}T_{ij}^{k} = 0$. Это означает, что диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ является гармоническим отображением (см. [5]). Из (2.1) и (2.2) следует также, в частности, что g является тензором Кодацци по отношению к связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$, поскольку в этом случае $\overline{\nabla}_k g_{ij} = \overline{\nabla}_i g_{kj}$. Верно и обратное. Поэтому имеет место следующая

Теорема 2.1. *Для того чтобы диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\ \overline{g})$ был эквиаффинным класса J_1, необходимо и достаточно, чтобы он был гармоническим отображением и метрический тензор g был тензором Кодацци на $(\overline{M},\ \overline{g})$.*

Геометрия многообразий, несущих тензорные поля Кодацци, подробно описана в литературе (см. обзор в [6, с. 590 – 598]). Поэтому можно применить установленные факты для описания геометрии эквиаффинных диффеоморфизмов класса $f \in \mathrm{J}_1$. Так, например, справедлива

Теорема 2.2. *Для того чтобы диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ на некоторое псевдориманово многообразие $(\overline{M},\ \overline{g})$ постоянной кривизны $\overline{K}$ был эквиаффинным класса J_1, необходимо, чтобы тензор g имел вид $g = Hess(F) + \overline{K}\,F\,\overline{g}$.*

2.2. Пусть теперь $f \in \mathrm{J}_2$. Это означает, что компоненты тензора g подчиняются дифференциальным уравнениям вида

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = -T_{ijk} - T_{jik}\,, \tag{2.3}$$

при условии, что

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0\ ;\ T_{ik}^{k} = 0\,. \tag{2.4}$$

Из условий (2.4) заключаем, что f является гармоническим отображением. В свою очередь из уравнений (2.3) и условий (2.4) заключаем, что g является *тензором Киллинга* (см. [7, с. 339 – 340]) по отношению к связности Леви-Чивита $\overline{\nabla}$, поскольку $\overline{\nabla}_k g_{ij} + \overline{\nabla}_i g_{kj} + \overline{\nabla}_i g_{kj} = 0$. Верно и обратное. Справедлива

Теорема 2.3. *Для того чтобы диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\ \overline{g})$ был эквиаффинным класса J_2, необходимо и достаточно, чтобы он был гармоническим отображением и метрический тензор g был тензором Киллинга на $(\overline{M},\ \overline{g})$.*

Геометрия многообразий, несущих киллинговы тензоры, подробно описана в литературе. Установленные факты можно применять для описания геометрии эквиаффинных диффеоморфизмов класса J_2. Так, киллингов тензор на римановом многообразии $(M,\ g)$ задает *первый квадратичный интеграл уравнений геодезических* (см. [8, с. 157 – 161]). Следовательно, наличие квадратичных интегралов уравнений геодезических на $(\overline{M}, \overline{g})$ можно рассматривать как необходимое условие для существования эквиаффинного отображения $f : M \to \overline{M}$ класса J_2. Справедлива следующая

Теорема 2.4. *Для того чтобы диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$ псевдориманова многообразия $(M,\ g)$ на локально плоское псевдориманово многообразие $(\overline{M},\ \overline{g})$ был эквиаффинным класса J_2, необходимо, чтобы в общей по отображению f системе координат $x^1,\dots,x^n$ тензор g имел вид*

$$g_{ij} = A_{ijkl} x^k x^l + B_{ijk} x^k + C_{ij} \tag{2.5}$$

для симметричных по первым двум индексам постоянным A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij} таким, что

$$A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0\,;\ B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0\,. \qquad (2.6)$$

Для доказательства достаточно заметить, что (см. [9]) на локально плоском псевдоримановом многообразии $(M,\ g)$ киллинговы тензоры имеют вид (2.5) для симметричных по первым двум индексам постоянным A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij}, удовлетворяющим условиям (2.6).

Список литературы

1. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.

2. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

3. *Yano K., Ishihara S.* Harmonic and relatively affine mappings // J. Diff. Geom. 1975. Vol. 10. P. 501 – 509.

4. *Степанов С.Е.* О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла // Теор. и мат. физика. 1997. Т. 111. №1. С. 32 – 43.

5. *Stepanov S.E., Shandra I.G.* Geometry of infinitesimal harmonic transformations // Annals of Global Analysis and Geometry. 2003. Vol. 24. Issue 3. P. 291 – 299.

6. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

7. *Крамер Д. и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.

8. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.

9. *Nijenhuis A.* A note on first integrals of geodesics // Proceedings of the koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen. Series A LXX. 1967. №2. P. 141 – 145.

T. Zudina, S. Stepanov

THE EQIAFFINE MAPPINGS OF PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS

The equiaffine mappings of pseudo-riemannian manifolds are considered. On the basis of the theory of representations of groups the classification of such mappings is given. The geometry of two of chosen of seven classes is described. In particular, the necessary and sufficient conditions of existence of equiaffine diffeomorphisms and the view of the metrics of Riemannian manifolds, supposing such mappings, are found.

УДК 514.75

В.С. Кальницкий
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ПЛОСКИХ И ОДНОРОДНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

Использованы полиномиальные симметрии плоских и однородных связностей. Доказана классификационная теорема. Рассмотрены вопросы реализуемости полной и неполной связностей.

§1. Введение

Пусть M^n однородное многообразие симметричной линейной связности ∇, Γ – транзитивная псевдогруппа всех локальных аффинных отображений. Элементы псевдогруппы, связывающие точки p, q, будем обозначать φ_{pq}. Все дальнейшие построения опираются на работу Номидзу [1], в которой доказана следующая

Теорема. *Пусть на односвязном многообразии задано тензорное уравнение, пространство ростков решений которого в каждой точке конечномерно и размерность есть постоянная функция точки на многообразии. Любой росток локального решения продолжим на все многообразие.*

Применим этот результат к пространству решений серии обобщенных уравнений Якоби – тензорных уравнений на пространстве тензорных полей A типа (1, k) вида: