УДК 514.75

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ, ЗАДАННЫЕ НЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К.В. П о л я к о в а

(Калининградский государственный университет)

В проективном пространстве рассмотрена поверхность и произведено композиционное оснащение (оснащение Картана и нормализация 2-го рода Нордена). Исследованы параллельные перенесения нормального направления в индуцированных связности и псевдосвязности 2-х типов. Показано, что оба перенесения могут задаваться вполне и не вполне интегрируемыми системами дифференциальных уравнений в зависимости от аналитического представления дифференциала точки пересечения нормальной прямой с плоскостью Картана.

Продолжим изучение поверхности X_m [1] как m-мерного многообразия центрированных касательных плоскостей T_m проективного пространства P_n. Нормаль 1-го рода N_{n-m}, пересекающая плоскость T_m лишь в ее центре - точке A, натянута на точки $A, B_a = A_a + \lambda^i_a A_i$, причем коэффициенты λ^i_a удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\lambda^i_a + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j, \qquad (1)$$

где дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом . Зададим плоскость Картана C_{n-m-1} $(A \notin C_{n-m-1} \subset N_{n-m})$ точками $C_a = B_a + \lambda_a A$. Равенства

$$M^i_{aj} \overset{\text{def}}{=} \lambda^i_{aj} - \lambda^i_b \Lambda^b_{jk}\lambda^k_a + \delta^i_j\lambda_a = 0 \qquad (2)$$

ограничивают [1] смещение плоскости C_{n-m-1} до смещений внутри нормали 1-го рода N_{n-m}, Λ^b_{jk} - фундаментальный объект поверхности X_m . Ковариантный дифференциал и ковариантные производные объекта λ^i_a выражаются соответственно по формулам [1] :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^i_a &= d\lambda^i_a + \lambda^j_a\tilde{\omega}^i_j - \lambda^i_b\tilde{\omega}^b_a + \tilde{\omega}^i_a, \\ \lambda^i_{a,j} &= \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Gamma^b_{aj} - \lambda^k_a\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{aj}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где формы групповой связности имеют вид : $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_i\omega^i$. Найдем внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\Delta\lambda^i_a$

$$d\Delta\lambda^i_a = \Delta\lambda^j_a \wedge \tilde{\omega}^i_j - \Delta\lambda^i_b \wedge \tilde{\omega}^b_a + (\ldots)^i_{ajk}\,\omega^j \wedge \omega^K. \qquad (4)$$

Рассмотрим нормальное направление AC - прямую, проходящую через точку A и пересекающую плоскость C_{n-m-1} в точке $C=\mu^a A_a+\mu^a\lambda^i_a A_i+A$, где учтена нормировка $\mu^a\lambda_a=1$. Выразим дифференциал точки C

$$dC=(\ldots)C+(\nabla\mu^a-\mu^a\mu^b(\omega_b+\lambda^i_b\omega_i)+\mu^b\lambda^i_b\omega^a_i)B_a+$$
$$+\mu^a(\nabla\lambda^i_a+\omega^i_a-\lambda^j_a\lambda^i_b\omega^b_j+\lambda_a\omega^i)A_i\ . \quad (5)$$

Так как выполняются уравнения (1), то формулу (5) можно переписать в виде

$$dC=(\ldots)C+(\nabla\mu^a-\mu^a\mu^b(\omega_b+\lambda^i_b\omega_i)+\mu^b\lambda^i_b\omega^a_i)B_a+\mu^a M^i_{aj}\omega^j A_i\ . \quad (5')$$

Следовательно, уравнениями инвариантности точки C являются только следующие

$$\nabla\mu^a-\mu^a\mu^b(\omega_b+\lambda^i_b\omega_i)=\mu^a_i\omega^i. \quad (6)$$

Объект μ^a образует геометрический объект лишь вместе с квазитензором λ^i_a, задающим нормаль N_{n-m}.

Вводя формы связности $\widetilde{\omega}^a_b=\omega^a_b-\Gamma^a_{bi}\omega^i$, $\widetilde{\omega}_a=\omega_a-\Gamma_{ai}\omega^i$, $\widetilde{\omega}_i=\omega_i-\Gamma_{ij}\omega^j$ в выражение (6), получим $\Delta\mu^a=\mu^a_{,i}\omega^i$. Совокупность $\{\Gamma^a_{bi},\Gamma_{ai},\Gamma_{ij}\}$ не образует геометрический объект даже вместе с фундаментальным объектом Λ^a_{ij} [1] . Внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\Delta\mu^a$ преобразуем к виду :

$$d\Delta\mu^a=\Delta\mu^b\wedge(\widetilde{\omega}^a_b-\mu^a\lambda^i_b\widetilde{\omega}_i-\mu^a\widetilde{\omega}_b)-\Delta\mu^a\wedge(\mu^b\lambda^i_b\widetilde{\omega}_i+\mu^b\widetilde{\omega}_b)-$$
$$-\mu^a\mu^b\Delta\lambda^i_b\wedge\widetilde{\omega}_i+(\ldots)^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j\ . \quad (7)$$

Линия ρ на поверхности X_m задается уравнениями $\omega^i=\rho^i\omega$. Тогда из (4), (7) следует, что вполне интегрируемой вдоль линии ρ является система уравнений

$$\Delta\mu^a|_\rho=0,\ \Delta\lambda^i_a|_\rho=0. \quad (8)$$

Образуя ковариантные дифференциалы объектов λ^i_a,μ^a в формулах (5) и (5’), получим две формулы для описания параллельных перенесений AC соответственно в связности Γ и псевдосвязности $\{\Gamma^a_{bi},\Gamma_{ai},\Gamma_{ij}\}$:

$$dC=(\ldots)C+\Delta\mu^a B_a+\mu^a\Delta\lambda^i_a A_i+\mu^b(\Gamma^a_{bi}+\lambda^j_b\Lambda^a_{ij})\omega^i C_a+$$
$$+\mu^a(\lambda^k_a\Gamma^i_{kj}-\lambda^i_b\Gamma^b_{aj}+\Gamma^i_{aj}-\lambda^k_a\lambda^i_b\Lambda^b_{jk}+\delta^i_j\lambda_a)\omega^j A_i+$$
$$+\mu^a(-\lambda_b\Gamma^b_{ai}+\Gamma_{ai}+\lambda^j_a\Gamma_{ji}-\lambda_b\lambda^j_a\Lambda^b_{ij})\omega^i A, \quad (9)$$
$$dC=(\ldots)C+\Delta\mu^a B_a+\mu^b(\Gamma^a_{bi}+\lambda^j_b\Lambda^a_{ij})\omega^i C_a+\mu^a M^i_{aj}\omega^j A_i+$$
$$+\mu^a(-\lambda_b\Gamma^b_{ai}+\Gamma_{ai}+\lambda^j_a\Gamma_{ji}-\lambda_b\lambda^j_b\Lambda^b_{ij})\omega^i A\ . \quad (9')$$

Из формулы (9) видно, что параллельное перенесение направления AC в связности Γ задается вполне интегрируемой системой (8) . Тогда как (9’) позволяет описать такой же перенос направления AC в псевдосвязности $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ij}\}$ с помощью не вполне интегрируемой подсистемы (8_1) . Оба параллельных перенесения являются в общем случае вырожденными 2-го типа [2] , т.е. имеют место, когда точка C смещается во всем пространстве P_n . Таким образом, геометрически одинаковые параллельные перенесения прямой AC, описанные формулами (9) и (9’), осуществляются соответственно в связности Γ и псевдосвязности $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ij}\}$ и задаются различными системами уравнений . Дополним подсистему уравнений (8_1) 2-го перенесения прямой AC до вполне интегрируемой системы уравнениями (8_2), задающими параллельный перенос плоскости C_{n-m-1}. При этом параллельное перенесение нормальной прямой, независимо от выбора формулы (9) или (9’) для его описания, происходит в связности Γ и задается вполне интегрируемой системой (8). Рассмотрим композицию параллельных перенесений прямой AC и плоскости C_{n-m-1}. Найденные в работах [1],[3] два способа охвата объекта связности Γ соответствуют следующим случаям : а) параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} является вырожденным 2-го типа и абсолютным, т.е. имеет место при произвольном смещении плоскости C_{n-m-1} во всем пространстве P_n и вдоль любой линии на поверхности X_m ; б) параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1}, при котором она смещается в нормали 1-го рода N_{n-m} , не является вырожденным и абсолютным .

Пусть Γ является объектом связности 2-го типа $(\overset{2}{\Gamma})$, т.е. его компоненты охвачены по формулам

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j,\ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi} = -\Lambda^a_{ij}\lambda^j_b - \delta^a_b\lambda_i, \tag{10}$$

$$\overset{2}{\Gamma}_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k - 2\lambda_i\lambda_j,\ \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \lambda^k_a(\delta^i_j\lambda_k - 2\Lambda^b_{jk}\lambda^i_b),$$

$$\overset{2}{\Gamma}_{ai} = \lambda^j_{ai}\lambda_j - \lambda_{ji}\lambda^j_a + 2\lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j - \Lambda^b_{ij}\lambda^k_b\lambda_k),$$

тогда ковариантные производные (3) равны нулю, а вырожденный 2-го типа параллельный перенос плоскости C_{n-m-1} в связности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj}\}$ является абсолютным . Уравнения $\overset{2}{\Delta}\lambda^i_a = 0$, задающие это перенесение, обращаются в тождества .

Запишем формулу (9) относительно связности $\overset{2}{\Gamma}$

$$dC = (\ldots)C + \overset{2}{\Delta}\mu^a B_a + \mu^a \overset{2}{\Delta}\lambda^i_a A_i + \mu^a M^i_{aj}\omega^j B_i. \tag{11}$$

Значит, прямая AC переносится параллельно в связности $\overset{2}{\Gamma}$, когда точка C смещается в m- плоскости $L_m = [C, B_i]$, натянутой на точку C и нормаль 2-го рода N_{m-1}. Система дифференциальных уравнений (8) этого перенесения вдоль линии ρ приводит к системе линейных однородных уравнений

$$\overset{2}{\mu}{}^a_{,i}\,\rho^i = 0\,,\ \overset{2}{\lambda}{}^i_{a,j}\,\rho^j = 0. \tag{12}$$

Поскольку $\overset{2}{\lambda}{}^i_{a,j}$=0, то m неизвестных ρ^i удовлетворяют лишь n-m уравнениям (12_1).

Формула (9') относительно связности 2-го типа примет вид

$$dC = (\ldots)C + \overset{2}{\Delta}\mu^a B_a + \mu^a M^i_{aj}\omega^j B_i. \tag{11'}$$

Следовательно, прямая AC переносится параллельно в псевдосвязности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{2}{\Gamma}_{ai}, \overset{2}{\Gamma}_{ij}\}$, когда точка C смещается в той же плоскости L_m. Это перенесение задает подсистема вида (8_1), которая относительно связности 2-го типа является вполне интегрируемой, что следует из (7) с учетом $\overset{2}{\Delta}\lambda^i_a = 0$. При этом ($12_1$) - уравнения для нахождения неизвестных ρ^i. Однако эти перенесения осуществляются в различных связностях : первое - в связности $\overset{2}{\Gamma}$, второе - в псевдосвязности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{2}{\Gamma}_{ai}, \overset{2}{\Gamma}_{ij}\}$.

Дополним систему $\overset{2}{\Delta}\mu^a|_\rho = 0$, задающую второе перенесение, уравнениями $\overset{2}{\Delta}\lambda^i_a = 0$ и рассмотрим композицию параллельных перенесений направления AC и плоскости C_{n-m-1}. Плоскость C_{n-m-1} при абсолютном параллельном перенесении смещается во всем пространстве P_n и вдоль любой линии (в том числе вдоль которой переносится прямая AC), поэтому можно считать, что этот параллельный перенос осуществляется при смещении точки C в плоскости L_m вдоль соответствующей линии. В этом случае формулы (11) и (11') задают один и тот же параллельный перенос прямой AC, являющийся геометрической характеристикой как связности $\overset{2}{\Gamma}$ так и псевдосвязности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{2}{\Gamma}_{ai}, \overset{2}{\Gamma}_{ij}\}$. Этот перенос определяется системой уравнений $\overset{2}{\Delta}\mu^a|_\rho = 0$.

Если объект связности Γ- 1-го типа ($\overset{1}{\Gamma}$), т.е. охвачен по формулам (10) и следующим

$$\overset{1}{\Gamma}_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \lambda_i\lambda_j, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{aj} = \delta^i_j(\lambda^k_a\lambda_k - \lambda_a) - \Lambda^b_{jk}\lambda^k_a\lambda^i_b,$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{ai} = \lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j - \Lambda^b_{ij}\lambda_b) - \lambda_a\lambda_i,$$

то выражение (9) преобразуется к виду

$$dC = (\ldots)C + \overset{1}{\Delta}\mu^a B_a + \mu^a \overset{1}{\Delta}\lambda^i_a A_i. \qquad (13)$$

Следовательно, прямая AC переносится параллельно в связности $\overset{1}{\Gamma}$, когда точка C неподвижна. Этот перенос задает система дифференциальных уравнений вида (8), а неизвестные можно найти из системы, аналогичной (12).

Формула (9') относительно связности 1-го типа принимает вид :

$$dC = (\ldots)C + \overset{1}{\Delta}\mu^a B_a + \mu^a M^i_{aj}\omega^j A_i. \qquad (13')$$

Здесь осуществляется параллельный перенос прямой AC в псевдосвязности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{1}{\Gamma}_{ai}, \overset{1}{\Gamma}_{ij}\}$, когда точка C смещается в плоскости $L_{m+1} = C \oplus T_m$. Он задается системой $\overset{1}{\Delta}\mu^a|_\rho = 0$, которая относительно связности 1-го типа не является вполне интегрируемой . Дополним эту систему до вполне интегрируемой уравнениями $\overset{1}{\Delta}\lambda^i_a|_\rho = 0$, которые задают параллельный перенос плоскости C_{n-m-1}, когда она смещается в нормали 1-го рода N_{n-m}, т.к.

$$dC_a = \theta C_a + (\omega^b_a + \lambda^i_a\omega^b_i)C_b + \overset{1}{\Delta}\lambda^i_a A_i + (\ldots)_a A.$$

При этом точка C остается в плоскости L_{m+1}. Условиями смещения плоскости C_{n-m-1} в нормали 1-го рода являются также соотношения (2), при выполнении которых параллельные перенесения прямой AC, описанные формулами (13),(13'), совпадают.

Работа выполнена по теме гранта Минобразования РФ(СПбКЦ).

Библиографический список

1. *Полякова К.В*. Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып.27. С. 63-70.

2. *Полякова К.В*. Вырожденные параллельные перенесения на поверхности как точечном многообразии // XXVIII науч. конф. КГУ: Тез. докл. Часть 6. 1997. С.7.

3. *Шевченко Ю.И*. Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии поверхности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1989. Вып.20. С. 122-128.

K.V. P o l y a k o v a

PARALLEL CARRIES, GIVEN BY NOTTOTALLY
INTEGRATED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

A surface is considered in projective space and is made its composition equipment (i.e. Cartans equipment and Nordens normalization of the second genus). Parallel carries of normal direction are investigated in induced connection and pseudoconnection of two types. It is shown, that both carries can be given by totally and nottotally integrated systems of differential equations depending on analytical representation of differential of point of intersection of a normal line with Cartans plane.

УДК 514.75

НОРМАЛЬНАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ ОСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И. П о п о в

(*Калининградский государственный университет*)

Для оснащенной регулярной гиперполосы H_m аффинного пространства A_{n+1} в касательном расслоении $T(V_m)$ и в нормальном расслоении $N(V_m)$ введены соответственно внутренняя аффинная связность γ и нормальная центроаффинная связность $\gamma^{\perp}$. Рассмотрены нормальная характеристическая центроаффинная связность $\eta^{\perp}$ в слоях расслоения $\chi(V_m)$ характеристик χ_x гиперполосы $H_m \subset A_{n+1}$, а также нормальная центроаффинная связность $\overset{*}{\eta}{}^{\perp}$, индуцируемая расслоением $l(V_m)$ оснащающих прямых l_x, где $l_x \subset N_x$, $x \subset V_m$. Показано, что тривиальное, осевое и центрально-осевое оснащения регулярной гиперполосы $H_m \subset A_{n+1}$ индуцируют в соответствующем расслоении плоскую связность [1]. Выяснено, например, что нормальная центроаффинная связность γ сферической гиперполосы [2] плоская, а внутренняя аффинная связность γ локально аффинная.

Схема использования индексов такова:

$$I,J,K,L=\overline{1,n+1};\ i,j,k,l=\overline{1,m};\ a,b,c,d=\overline{m+1,n};\ \alpha,\beta=(a,n+1).$$

§1. Задание нормальной аффинной связности на оснащенной