M. Cheshkova

OF MINIMAL HYPERSURFACE IN EUCLIDEAN SPACE E^4.

In a Euclidean space E^4 is considered a minimal hypersurface.

Theorem. *Let M is a minimal hypersurface in Euclidean space E^4, and lines of curvature form holonomic net. If two lines of curvatur are geodesic, then hypersurface M is cylinder off the catenoid.*

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

(Калининградский государственный университет)

ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ РЕПЕРЫ 2-ГО ПОРЯДКА НА ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

На гладком многообразии рассмотрен подвижной репер 2-го порядка $\{e_i, e_{ij}\}$. Показано, что на голономном гладком многообразии существует лишь голономный репер ($e_{ij}= e_{ji}$), а на неголономном гладком многообразии – только неголономный репер ($e_{ij}\neq e_{ji}$).

1. Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие V_n. Пусть точка $A\in V_n$ в некоторой локальной карте имеет координаты $x^i(i,j,k,m,p,q=\overline{1,n})$. Тогда A является функцией координат: $A=A(x^i)$. Продифференцируем это равенство формально:

$$dA=\partial_i A dx^i \ (\partial_i A=\frac{\partial A}{\partial x^i}). \tag{1}$$

Придадим смысл формуле (1). Наделим векторное пространство T_n, касательное к многообразию V_n в точке A, точечной структурой, превратив его тем самым в аффинное пространство. Естественно предполагать, что точка $A\in T_n$, тогда пространство T_n станет центроаффинным. Выберем в центроаффинном пространстве T_n некоторую точку O, отличную от точки A, и отождествим A с соответствующим радиус-вектором $\overline{OA}$. Отметим, что выбор точки O несущественен, так как ее можно заменить другой точкой O′ с сохранением следующих ниже рассуждений.

В формуле (1) частные производные $\partial_i A$ есть базисные векторы, на которые натянуто касательное пространство $T_n =[\partial_i A]$, рассматриваемое как векторное пространство. Совокупность векторов $\{\partial_i A\}$ называется натуральным подвижным (см., например, [1, с.177]) репером 1-го порядка многообразия V_n в точке A. Учитывая тождества $D(dx^i)=0$, где D – внешний дифференциал, продифференцируем формулу (1) внешним образом:

$$D(dA)= \partial_{ij}A dx^j \wedge dx^i \ (\partial_{ij}A=\frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}).$$

Предложение 1. Дифференциал точки A является полным тогда и только тогда, когда 2-е смешанные производные $\partial_{ij}A$ симметричны:

$$D(dA)=0 \Leftrightarrow \partial_{[ij]}A=0.$$

Замечание 1. Для полного и неполного дифференциалов точки A Г.Ф. Лаптев [2, с.20] использовал разные обозначения: $d\overline{A}$ и $\overline{dA}$.

2. Пусть $\{e_i\}$ – произвольный базис касательного пространства T_n. Разложим его векторы по натуральному базису:

$$e_i = x_i^j \partial_j A, \tag{2}$$

$$\det(x_i^j) \neq 0. \tag{3}$$

Из формулы (2) найдем

$$\partial_k A = \tilde{x}_k^i e_i, \tag{4}$$

$$x_i^j \tilde{x}_k^i = \delta_k^j, \tag{5}$$

т.е. $(\tilde{x}_k^i)$ – матрица, обратная к матрице (x_i^j). Подставим выражения (4) в формулу (1):

$$dA = \omega^i e_i, \tag{6}$$

$$\omega^i = \tilde{x}_j^i dx^j. \tag{7}$$

Отметим, что первая деривационная формула аффинного пространства имеет вид (6). Формулу (6) и ее продолжение в фиксированной точке использовал В. Близникас [3] при исследовании метрического пространства линейных элементов. На гладком многообразии этой формулой также пользовался В. Слебодзинский [4]. У Г.Ф. Лаптева формула (6) есть лишь в скалярном виде [5, с.162], но он использовал ее продолжения с последующей фиксацией точки гладкого многообразия. М.А. Акивис [6] применил эту формулу в явном виде и записал ее продолжения без фиксации точки многообразия. Формула (6) описана в книге [7, с. 49] А.К. Рыбников [8; 9] использовал как голономные, так и неголономные продолжения этой формулы при фиксации точки, что позволило ему исследовать голономное и неголономное гладкие многообразия [10].

3. Продифференцируем формулу (1) обычным образом:

$$d^2A = \partial_{ij}A dx^j dx^i + \partial_i A d^2 x^i. \tag{8}$$

Из формулы (1) видно, что дифференциал dA лежит в касательном пространстве T_n, а из формулы (8) следует, что 2-й дифференциал d^2A принадлежит соприкасающемуся пространству 2-го порядка $T^2=[\partial_i A, \partial_{ij}A]$. Репер $R_o^2=\{\partial_i A, \partial_{ij}A\}$ соприкасающегося пространства T^2 назовем натуральным подвижным репером 2-го порядка многообразия V_n в точке A. Размерность пространства T^2 зависит от симметрии частных производных $\partial_{ij}A$.

Определение. Если частные производные 2-го порядка $\partial_{ij}A$ симметричны в точке A, то соприкасающееся пространство 2-го порядка T^2 к многообразию V_n в этой точке назовем голономным и обозначим $\overset{0}{T}{}^2$. Если же они несимметричны, то будем говорить о неголономном соприкасающемся пространстве $\tilde{T}^2$.

Таким образом, $\dim\tilde{T}^2$ =n(n+1), $\dim \overset{0}{T}{}^2 = \frac{1}{2}$ n(n+3). Отметим, что голономное соприкасающееся пространство $\overset{0}{T}{}^2$ возникает на голономном гладком многообразии $\overset{o}{V}_n$, а неголономное пространство $\tilde{T}^2$ появляется на неголономном многообразии $\tilde{V}_n$ [10]. Чтобы не изменять обозначение соприкасающегося пространства T^2 к многообразию V_n в зависимости от его голономности, можно говорить о неголономной и голономной размерности пространства T^2 и записывать следующим способом:

$$\mathrm{Dim}\ T^2 = n(n+1),\ \dim T^2 = \frac{1}{2} n(n+3).$$

4. Пусть $R^2=\{e_i,e_{ij}\}$ – произвольный базис соприкасающегося пространства T^2. Разложим векторы e_{ij} в натуральном базисе R_o^2:

$$e_{ij} = x_{ij}^{km}\partial_{km}A + x_{ij}^{k}\partial_k A, \tag{9}$$

$$\det(x_{ij}^{km}) \neq 0, \tag{10}$$

где индексы i, j нумеруют строки, а индексы k, m – столбцы. С другой стороны, разложим векторы $\partial_{ij}A$ по векторам произвольного репера R^2:

$$\partial_{ij}A = \tilde{x}_{ij}^{km}e_{km} + \tilde{x}_{ij}^{k}e_k. \tag{11}$$

Подставим сюда выражения (2; 9):

$$\partial_{ij}A = \tilde{x}_{ij}^{km}x_{km}^{pq}\partial_{pq}A + (\tilde{x}_{ij}^{mp}x_{mp}^{k} + \tilde{x}_{ij}^{m}x_{m}^{k})\partial_k A.$$

Эти равенства обращаются в тождества при условиях:

$$\tilde{x}_{ij}^{km}x_{km}^{pq} = \delta_i^p\delta_j^q, \tag{12}$$

$$\tilde{x}_{ij}^{mp}x_{mp}^{k} + \tilde{x}_{ij}^{m}x_{m}^{k} = 0. \tag{13}$$

Уравнения (5; 12; 13) определяют квадратную матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix} x_{ij}^{km} & x_{ij}^{p} \\ 0 & x_q^p \end{pmatrix}$, где индексы i,j,q нумеруют строки, а индексы к,m,p – столбцы. Отметим, что система (12; 13) в общем случае состоит из $n^3(n+1)$ линейных неоднородных уравнений, содержащих такое же количество неизвестных $\tilde{x}_{ij}^{km}, \tilde{x}_{ij}^{m}$. В силу условий (3; 10) определитель этой системы отличен от нуля, поэтому из нее находятся неизвестные элементы обратной матрицы (элементы $\tilde{x}_q^p$ определены ранее).

5. Продифференцируем равенства (2) обычным образом:

$$de_i = d x_i^j\partial_j A + x_i^j\partial_{jk}A dx^k.$$

Подставим выражения (4; 11) векторов натурального базиса R_o^2:

$$de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^{jk} e_{jk}, \tag{14}$$

$$\omega_i^j = \tilde{x}_k^j dx_i^k + x_i^m\,\tilde{x}_{mk}^j\,dx^k, \tag{15}$$

$$\omega_i^{jk} = x_i^m \tilde{x}_{mp}^{jk}\, dx^p. \qquad (16)$$

Пусть структурные уравнения Лаптева [5] многообразия V_n имеют вид:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i. \qquad (17)$$

Продолжая уравнение (6) при условии

$$D(dA)=0, \qquad (18)$$

получим [6, с. 56]

$$de_i = \omega_i^j e_j + \omega^j e_{ij}, \qquad (19)$$

причем векторы e_{ij} симметричны: $e_{[ij]}=0$. Если условие (18) не выполнено, то формула (19) сохраняется, но векторы e_{ij} теряют симметрию [10].

Сопоставляя формулы (14) и (19), имеем $\omega_i^{jk} = \delta_i^j \omega^k$. Подставляя сюда выражения (7; 16) форм ω^k, ω_i^{jk}, найдем $x_i^m \tilde{x}_{mp}^{jk} = \delta_i^j \tilde{x}_p^k$. Умножим на $\tilde{x}_q^i$:

$$\tilde{x}_{qp}^{jk} = \tilde{x}_q^j \tilde{x}_p^k. \qquad (20)$$

Эти равенства влекут аналогичные равенства для элементов исходной матрицы:

$$x_{ij}^{km} = x_i^k x_j^m. \qquad (21)$$

Действительно, подставляя выражения (20; 21) в равенства (12), убеждаемся в их справедливости в силу соотношений (5). Отметим, что подстановка выражений (20) в равенства (13) и умножение на $\tilde{x}_k^q$ дает

$$\tilde{x}_{ij}^q = -\tilde{x}_k^q \tilde{x}_i^m \tilde{x}_j^p x_{mp}^k. \qquad (22)$$

6. В силу выражений (21) формула (9) принимает вид:

$$e_{ij} = x_i^k x_j^m \partial_{km} A + x_{ij}^k \partial_k A.$$

Эта формула показывает принципиальную возможность трех случаев:

$$1)\ \partial_{[km]}A=0,\ x_{[ij]}^k = 0 \Rightarrow e_{[ij]}=0;\ \ 2)\ \partial_{[km]}A=0,\ x_{[ij]}^k \neq 0 \Rightarrow e_{[ij]}\neq 0;$$
$$3)\ \partial_{[km]}A\neq 0 \Rightarrow e_{[ij]}\neq 0.$$

Первые два случая могли бы быть лишь для голономного гладкого многообразия $\overset{0}{V}_n$, на котором частные производные 2-го порядка $\partial_{[km]}A$ симметричны. Поэтому можно было бы назвать репер R^2 голономным либо неголономным в зависимости от симметрии коэффициентов x_{ij}^k по нижним индексам. Но из формулы (11) следует симметрия величин $\tilde{x}_{ij}^k$, которая согласно формуле (22) влечет симметрию величин x_{ij}^k, поэтому 2-й случай невозможен.

Предложение 2. На голономном гладком многообразии $\overset{0}{V}_n$ существует лишь голономный подвижной репер 2-го порядка $\overset{0}{R}{}^2=\{e_i, e_{ij} \mid e_{ij}= e_{ji}\}$.

Если гладкое многообразие V_n неголономно, то частные производные $\partial_{km}A$ несимметричны. Здесь реализуется 3-й случай, в котором векторы e_{ij} несимметричны вне зависимости от симметрии коэффициентов x^k_{ij} по нижним индексам. Следовательно, справедливо

Предложение 3. На неголономном гладком многообразии $\widetilde{V}_n$ существует только неголономный подвижной репер 2-го порядка $\widetilde{R}^2=\{e_i, e_{ij} \mid e_{ij}\neq e_{ji}\}$.

Замечание 2. Сформулированные в предложениях 2 и 3 утверждения справедливы и для подвижных реперов высших порядков на гладких многообразиях.

7. Покажем симметрию величин x^k_{ij} в общем случае. Продифференцируем равенства (7) внешним образом: $D\omega^i = d\widetilde{x}^i_j \Lambda dx^j$. Подставляя выражения дифференциалов координат:

$$dx^j = x^j_k\,\omega^k, \tag{23}$$

которые находятся из равенств (7), получим

$$D\omega^i = \omega^j \Lambda(-x^k_j d\widetilde{x}^i_k).$$

Эти уравнения можно записать [5] в более общем виде (17), где

$$\omega^i_j = -x^k_j d\widetilde{x}^i_k + y^i_{jk}\omega^k \quad (y^i_{[jk]} = 0). \tag{24}$$

Подставим выражения дифференциалов (23) в равенства (15):

$$\omega^i_j = \widetilde{x}^i_k dx^k_j + x^m_j \widetilde{x}^i_{mp} x^p_k \omega^k. \tag{25}$$

Дифференцируя равенства (5) обычным образом, имеем

$$\widetilde{x}^i_k dx^k_j = -x^k_j d\widetilde{x}^i_k. \tag{26}$$

Учитывая это при сопоставлении форм (24) и (25), получим

$$y^i_{jk} = x^m_j \widetilde{x}^i_{mp} x^p_k. \tag{27}$$

Отсюда видно, что симметрия величин y^i_{jk} по нижним индексам влечет симметрию величин $\widetilde{x}^i_{mp}$, которые вызывают симметрию коэффициентов x^i_{jk}. Имеем

Предложение 4. Коэффициенты x^i_{jk} симметричны по нижним индексам в голономном и неголономном случаях.

Выражения (24) с помощью соотношений (26) принимают вид:

$$\omega^i_j = \widetilde{x}^i_k dx^k_j + y^i_{jk}\omega^k, \tag{28}$$

что с точностью до обозначений совпадает с выражениями Г.Ф. Лаптева [5, с. 146]. Из соотношений (22) находятся величины (27): $y^i_{jk} = -\widetilde{x}^i_m x^m_{jk}$, подстановка которых в выражения (28) с учетом предложения 4 дает выражения Л.Е. Евтушика [11, с.128].

Список литературы

1. *Белько И.В., Бурдун А.А., Ведерников В.И., Феденко А.С.* Дифференциальная геометрия. Минск, 1982.
2. *Лаптев Г.Ф.* О внутренних геометриях многообразий, вмещенных в многомерное аффинное пространство: Диссертация. М., 1941.
3. *Близникас В.* О некоторых геометрических объектах метрического пространства линейных элементов // Лит. мат. сб. 1961. Т. 1. №1 – 2. С. 15 – 23.
4. *Slebodzivski W.* Formes exte′rieures et leurs applications. Warszawa, 1963. Vol.2.
5. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М.,1966. Т. 1. С. 139 – 189.
6. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.
7. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5 – 247.
8. *Рыбников А.К.* Об аффинных связностях второго порядка // Мат. заметки. 1981. Т. 29. №2. С. 279 – 290.
9. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Мат. 1983. №1. С. 73 – 80
10. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.
11. *Евтушик Л.Е.* Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 119 – 150.

Yu. Shevchenko

HOLONOMIC AND NONHOLONOMIC FRAMES OF 2-ND ORDER ON THE SMOOTH MANIFOLD

Movable frame of 2-nd order $\{e_i, e_{ij}\}$ is considered. It is shown, that on the holonomic smooth manifold only holonomic frame ($e_{ij} = e_{ji}$) exists, and on the nonholonomic manifold only nonholonomic frame ($e_{ij} \neq e_{ji}$) does.

УДК 514.75

Е.П. Юрова

(Калининградский государственный университет)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Рассматривается (n-1)-мерное многообразие V_{n-1} гиперквадрик Q в n-мерном аффинном пространстве. На гиперповерхности центров гиперквадрик, как ранее показано автором, возникает ряд аффинных связностей и других структур теории точечных отображений. Доказана теорема, относящаяся к специальному случаю указанных структур.

В работах [1; 2] определены и геометрически охарактеризованы порождаемые многообразием V_{n-1} гиперквадрик n-мерного расширенного аффинного пространства в 1-й дифференциальной окрестности центра гиперквадрики аффинные связности N, g, γ, $\mathring{\gamma}$, T, причем связность g определяется формулой (7) [1], а