антной точкой p, приводим базисные формы θ^i к виду: $\theta^i=\omega^i$. Тензор $\gamma^i_{jk} = \overset{*}{M}{}^I_j \lambda^i_{Ik}$ определяет в пространстве a_n аффинную связность γ. Действительно, формы Пфаффа $\tilde{\omega}^i=\omega^i$, $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + \gamma^i_{jk}\omega^k$ удовлетворяют уравнениям структуры пространства аффинной связности [3]:

$$D\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^p \wedge \tilde{\omega}^i_p - \gamma^i_{[pm]}\tilde{\omega}^p \wedge \omega^m,$$

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \left(\gamma^i_{j[ms]} + \gamma^k_{j[m}\gamma^i_{|k|s]}\right)\tilde{\omega}^s \wedge \tilde{\omega}^m,$$

причем $\nabla\gamma^i_{jm} = \gamma^i_{jms}\theta^s$, $\gamma^i_{jms} = \overset{*}{M}{}^I_j \lambda^i_{Ims} - \overset{*}{M}{}^I_k \overset{*}{M}{}^L_j \lambda^k_{Ls}\lambda^i_{Im}$.

Библиографический список

1. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1980. 84 с.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275-383.

3. *Рыбников А. К.* Аффинные связности, индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного пространства // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.135-155.

4. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84с.

5. *Шевченко Ю. И.* Связности голономных и неголономных дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып. 25. С.110-121.

N. V. M a l a k h o v s k y

ON n-PARAMETRIC FAMILIES OF AFFINE MAPS

An n-parametric family H_n of affine maps $h:A_n \rightarrow a_n$ of n-dimensional affine space is studied. Field of fundamental geometric object of the first and second orders are constructed. Their subobject and scopes are investigated. Focal manifolds of the family H_n are considered. In the case of a (centroaffine) space A_n an invariant metric in A_n, and in the space a_n an affine connection is defined, induced by the family H_n.

УДК 514.75

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN'SCHER MANNIGFALTIGKEIT (I)

V.V. K a i s e r

(Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg)

Viele Begriffe der Differentialgeometrie geradliniger Kongruenzen und Komplexe [1], [2], [3] können auf den Fall der nicht integrierbaren glatten Distributionen [4] auf der Grassmann'scher Mannigfaltigkeit aller Geraden eines projektiven Raumes erweitert werden. Hier werden spezielle 2-dimensionale Distributionen mit unbestimmten Brennpunkten sowie Brennebenen untersucht. Es werden auch 3-dimensionale spezielle Distributionen untersucht, deren maximale integrale Mannigfaltigkeiten im integrierbaren Fall als Tangentenkomplexe einer Fläche auftreten.

1. Einleitung. Formulierungen der Ergebnisse.

Es ist bekannt, daß die Integralkurven einer nicnt vollständig integrierbaren Pfaff'schen Gleichungen $Pdx+Qdy+Rdz=0$, die durch einen Punkt $A_0(x_0,y_0,z_0)$ in $\mathbf{R}^3$ durchgehen, nicht auf einer Fläche liegen, sonder in diesem Punkt A_0 eine Ebene $P(A_0)(x-x_0)+Q(A_0)(y-y_0)+R(A_0)(z-z_0)=0$ berürhen. So wird eine sogenannte Distribution auf dem Raum $\mathbf{R}^3$ bestimmt, die jedem punkt $A_0\in\mathbf{R}^3$ eine Fläche zuordnet, die diesen Punkt A_0 enthält.

In einer verallgemeinerten Situation betrachtet man eine Pfaff'sche Gleichung oder ein Pfaff'sches Gleichungssystem auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Dises Gleichungssystem bestimmt dann eine glatte Distribution [4] Δ auf dieser Mannigfaltigkeit, die jedem Punkt $p\in M$ einen Unterraum $\Delta(p)$ des tangentiellen Raumes T_pM zuordnet, in dem alle Tangetialvektoren der Integralkurven dises Pfaff'schen Systems liegen. Die Pfaff'schen Gleichungssysteme und die glatten Distributionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit bestimmen einander gegenseitig.

Unter der nichtholonomen Geometrie versteht man die Geometrie der glatten nicht integrierbaren Distributionen [4] auf glatten Mannigfaltigkeiten. Selbst Distributionen nennt man manchmal auch nichtholonome Mannigfaltigkeiten (sieh [5], [6]).

In diesem Artikel werden glatte Distributionen auf der 4-dimensionalen Grassman'schen Mannigfaltigkeit M aller Geraden eines dreidimensionalen projektiven Raumes untersucht. Die zweidimentionalen Distributionen k auf M nennen wir nichtholonome Kongruenzen und die dreidimentionalen Distributionen K nennen wir nichtholonome Komplexe. Diese Terminologie wird daraus begründet, daß es im integrierbaren Fall für jeden Punkt $l\in M$ eine integrale Geradenkongruenz [1], [2] (als zweidimentionale Unter-mannigfaltigkeit von M) oder einen integralen Geradenkomplex [1], [3] (als eine dreidimentionale Untermannigfaltigkeit) gibt, die (oder der) diese Gerade l enthält. Einige Ergebnisse des Artikels wurden in den Kurzberichten [7], [8] annonciert. Einzelne Aspekte der Theorie von nicht speziellen nichtholonomen Kongruenzen und Komplexen wurden in [9] betrachtet.

Im ersten Abschnitt des Artikels wird eine Kurzübersicht von den dazugehörenden Begriffen gegeben. Die Formulierungen aller Ergebnisse werden auch hier zusammengefaßt. Alle Beweise sind in den letzten zwei Abschnitten gegeben und sind so ausgebaut, daß man nicht unbedingt die Cartan'sche Methode der äußeren Differentialformen beherrschen muß, um sie zu verstehen. Dafür sind die Grundbegriffe der geradlinigen Differential-geometrie im zweiten Abschnitt aus moderner Sicht kurz erwähnt.

1.1. Spezielle nichtholonome Kongruenzen. Man kann die nicht-holonomen Kongruenzen nach der Anzahl der Striktionspunkte (Brennpunkte) ihrer integralen Torsen (aufrollbaren Flächen), die eine Gerade $l \in M$ erhalten, und nach der Anzahl ihrer Tangentialebenen (Brennebenen) natürlicherweise klassifizieren. Außer dem hyperbolischen Fall (wenn beide Brennpunkte und beide Brennebenen verschieden sind), dem parabolischen Fall (wenn jede Gerade $l \in M$ je einen Brennpunkt und eine Brennebene besitzt) und dem elliptischen Fall (wenn es keine reellen Brennpunkte und Brennebenen gibt), können noch zwei Fälle auftreten.

Der erste Fall tritt ein, wenn die Brennebenen unbestimmt sind (d.h. jede eine Gerade $l \in M$ enthaltene Ebene ist die Tangentialebene einer integralen Torse). In diesem Fall gibt es auf l genau einen Brennpunkt. Solche nichtholonome Kongruenzen nennen wir spezielle des ersten Typs. Alle ihre interale Regelflächen, die durch eine Gerade $l \in M$ durchgehen, sind Torsen mit einem gemeinsamen Gratpunkt auf l.

Möglich ist ein dualer Fall auch, wenn Brennpunkten unbestimmt sind (d.h. jeder Punkt der Gerade $l \in M$ ist der Gratpunkt einer integralen Torse). Solche nichtholonome Kongruenzen nennen wir spezielle des zweiten Typs. Alle ihre integrale Regelflächen, die eine Gerade l enthalten, sind Torsen mit einer gemeinsamen Tangentenebene.

Bemerkung. Die Grassman'sche Mannigfaltigkeit M kann man mit Hilfe von Plücker'scher Übertragung bekannterweise als eine Hyperquadrik Q_4^2 in einem 5-dimentionallen projektiven Raum P^5 interpretieren. Der asymptotische Kegel $K_3^2(l)$ der Hyperquadrik $M = Q_4^2$ im Punkt $l \in M$ als der Schnitt von $T_l M$ und M trägt zwei 1-parametrischen Scharen von 2-dimentionalen Erzeugenden. Wir nennen zwei Disrtibutionen Δ und Δ^* auf $M = Q_4^2$ konjugiert, wenn ihre laufenden Ebenen $\Delta(l)$ und $\Delta^*(l)$ in bezug auf den asymptotischen Kegel $K_3^2(l)$ für alle $l \in M$ einander konjugiert sind. Man kann zeigen, daß eine nicht-holonome Kongruenz k dann und nur dann speziell des ersten oder des zweiten Typs ist, wenn sie eine selbstkonjugierte Distribution auf $M = Q_4^2$ darstellt, d.h. wenn ihre laufenden Ebenen $k(l)$ zu einer Schar von 2-dimentionalen Erzeugenden des asymptotischen Kegels $K_3^2(l)$ gehören.

Eine nicht spezielle nichtholonome Kongruenz k kann mit Hilfe von zwei linear unabhängigen einander konjugierten Richtungsfelder $\Delta_1 \subset k$ und $\Delta_1^* \subset k$ bestimmt werden. Diese erzeugen für jede Gerade $l \in M$ zwei involutorische Projektivitäten Q und $\tilde{Q}$. Um besser diese zu beschreiben, bezeichnen wir S_l und S_l^* die integralen Regelflächen der Richtungsfelder Δ_1 und Δ_1^*, die durch eine Gerade $l \in M$ durchgehen.

Die erste Q von den beiden Involutionen wird durch die Überein-stimmung der Tangentenebenen von den Regelflächen S_l und S_l^* in den entsprechenden Punkten $T\in l$ und $Q(T)$ bestimmt (sieh [13]). Die zweite $\tilde{Q}$ wird auf dem Büschel aller durch die Gerade $l\in M$ durchgehenden Ebenen durch die Übereinstimmung der Schnittpunkte der Gerade l mit den Charakteristiken der entsprechenden Ebenen $\Gamma\supset l$ und $\tilde{Q}(\Gamma)$ bestimmt.

Es ist leicht zu zeigen, daß die beiden Involutionen Q und $\tilde{Q}$ nicht von der Auswahl der Richtungsfelder $\Delta_1\subset k$ und $\Delta_1^*\subset k$ abhängen, d.h. sie werden nur von der nichtspeziellen nichtholonomen Kongruenz k selbst bestimmt. Es ist aber zu bemerkt, daß die zu k konjugierte nichtholonome Kongruenz k^* dieselbe Involutionen Q und $\tilde{Q}$ erzeugt und besitzt dieselbe Brennpunkte und Brennebene, wie k.

Diese fundamentale Involutionen Q und $\tilde{Q}$ sind dann und nur dann hyporbolisch, parabolisch oder elliptisch, wenn die nichtholonome Kongruenz k selbst entsprechend hyporbolisch, parabolisch oder elliptisch ist. Die Festpunkte und Festebenen dieser fundamentalen Involutionen sind die Brennpunkte und Brennebenen der nichtholonomen Kongruenz k.

Satz 1.1. Die Angabe einer speziellen nichtholonomen Kongruenz des ersten Typs ist der Ausstattung der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit einem glatten Feld von Punkten auf den Geraden von M äquivalent. Eine Regelfläche stellt dabei die integrale Kurve dieser nichtholonomer Kongruenz dann und nur dann dar, wenn sie eine Torse ist, deren Gratlinie aus den angegebenen Punkten besteht.

Satz 1.2. Eine spezielle nichtholonome Kongruenz des zweiten Typs wird mit Hilfe der Angabe der Ausstattung der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit mit einem glatten Feld von den Ebenen, die die ent-sprechenden Geraden $l\in M$ enthalten, eindeutig bestimmt. Eine Regelfläche stellt dabei die integrale Kurve dieser nichtholonomen Kongruenz dann und nur dann dar, wenn sie eine Torse ist, die eine einparametrische Schar angegebener Ebenen einhüllt.

Satz 1.3. Ist eine spezielle nichtholonome Kongruenz des ersten Typs eine integrierbare Distribution auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M, dann ist ihre maximale integrale 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, die eine Gerade $l\in M$ enthält, ein Bündel aller Geraden mit dem Zentrum im Brenn-punkt der Gerade l.

Satz 1.4. Ist eine spezielle nichtholonome Kongruenz des zweiten Typs eine integrierbare Distribution auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M, dann ist ihre maximale integrale 2-dimentionale Mannigfaltigkeit, die durch eine Gerade $l\in M$ durchgeht, die Menge aller Geraden, die in der Brennebene der Gerade l liegen.

1.2. Spezielle nichtholonome Komplexe. Der Begriff der Haupt-korrelation [3] eines Geradenkomplexes wird natürlicherweise auf den Fall eines nichtholonomen Komplexes K erweitert. Und zwar ordnet diese Hauptkorrelation jedem Punkt T einer Gerade $l\in M$ die Tangentialebene einer integralen Torse mit dem Gratpunkt im Punkt T zu. Spezielle nichtholonome Komplexe sind genau die, deren Hauptkorrelation für jede Gerade $l \in M$ ausgeartet wird. Im integrierbaren Fall wird jede maximale integrale Mannigfaltigkeit von K einen Tangentenkomplex einer Fläche darstellen.

Man kann zeigen, daß im speziellen Fall genau zwei 2-dimentionalen Unterdistributionen [10] $k_1 \subset K$, $k_2 \subset K$ existieren, die die speziellen nichtholonomen Kongruenzen des ersten und des zweiten Typs sind. Den Brennpunkt einer Geraden l in bezug auf k_1 und ihre Brennebenen in bezug auf k_2 nennen wir das Zentrum und die Hauptebene (oder fokale Ebene) von l in bezug auf K. Die erste nichtholonome Kongruenz k_1 nennen wir zentrale für K und die zweite k_2 nennen wir fokale für K.

Bemerkung. Interpretiert man die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit M mit Hilfe von Plücker'scher Übertragung bekannterweise als eine Hyperquadrik Q_4^2 in einem 5-dimentionalen projektiven Raum P^5, dann berühren die laufenden 3-Ebenen $K(l)$ eines speziellen nichtholonomen Komplexes K den asymptotischen Kegel $K_3^2(l)$ der Plücker'schen Quadrik Q_4^2 und schneiden ihn in zwei 2-dimentionalen Ebenen $k_1(l)$ und $k_2(l)$, die die laufenden Ebenen der zentralen und der fokalen nichtholonomen Kongruenzen k_1 und k_2 für K sind.

Satz 1.5. Die Angabe eines speziellen nichtholonomen Komplexes K ist der Ausstattung der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit einem glatten Feld von (zentralen) Punkten auf den Geraden von M und einem glatten Feld der diese geraden enthaltenen (Haupt) Ebenen äquivalent. Eine Regelfläche stellt dabei eine integrale Kurve dieses nichtholonomen Komplexes dann und nur dann dar, wenn die Tangenten ihrer Linie, die von den angegebenen Punkten gebildet ist, in den entsprechenden angegebenen Eben liegen.

Dieser Satz 1.5 zeigt, daß die Theorie spezieller nichtholonomer Komplexe der Theorie der 4-parametrischen Scharen von Flaggen (Elementen, die aus einander inzidenten Punkten, Geraden und Ebenen bestehen) äquivalent ist.

Satz 1.6. Eine glatte Distribution, die auf die willkürlich gegebenen speziellen nichtholonomen Kongruenzen k_1 und k_2 des ersten und des zweiten Typs gespannt wird [10], ist dreidimentional und stellt einen speziellen nicht-holonomen Komplex dar. Der Brennpunkt der Gerade $l \in M$ in bezug auf k_1 ist das Zentrum Z für K und die Brennebene in bezug auf k_2 ist die Hauptebene $\tilde{A}$ für K. Der Schnitt von den Distributionen k_1 und k_2 ist eindimentional. Die integralen Regelflächen des Richtungsfelders $k_1 \cap k_2$ sind Torsen mit den Gratpunkten in den Zentren Z und mit den Tangentialebenen, die mit den Hauptebenen $\tilde{A}$ übereinstimmen.

Laut dem Satz 1.6 ist der Schnitt der zentralen und fokalen nicht-holonomen Kongruenzen k_1 und k_2 eines nichtholonomen Komplexes K eindimensional. Die Distribution $k_1 \cap k_2$ nennen wir Sonderdistribution des nichtholonomen Komplexes K. Ihre integralen Regelflächen sind Torsen mit den Gratpunkten in den Zentren der Geraden $l \in M$ und mit den Tangential-ebenen, die mit den Hauptebenen übereinstimmen. Wir nennen sie Sondertorsen.

Bemerkung. Es ist aus der obigen Bemerkung klar, daß wenn man die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit M mit Hilfe von Plücker'scher Übertragung als die Plücker'sche Hyperquadrik Q_4^2 in einem 5-dimensionalen projektiven Raum P^5 interpretiert, dann wird die Sonderdistribution dem nichtholonomen Komplex K konjugiert. Man kann aber zeigen, daß wenn der nichtholonome Komplex K nicht speziell ist, stimmt die Chasles-Berührungskorrelation [1] der integralen Regelflächen der ihm konjugierten 1-dimentionalen Distribution mit der Hauptkorrelation von K für alle Geraden $l \in M$ überein.

Satz 1.7. Die nichtholonomen Erweiterungen[2] [6] $K_1=I(k_1)$ und $K_2=I(k_2)$ von zentralen und fokalen nichtholonomen Kongruenzen Komlexes K sind selbst spezielle nichtholonome Komlexe. Zentren der Geraden $l \in M$ in bezug auf K und K_1 stimmen überein (sowie die Hauptebenen in bezug auf K und K_2).

Ist die zentrale nichtholonome Kongruenz k_1 nicht integrierbar, existiert nur eine einzige 1-dimentionale Unterdistribution $kon \subset K$, deren alle integralen Regelflächen die Kegel mit den Spitzen in den Zentren von Geraden $l \in M$ sind. Sonst werden alle integrale Regelflächen von k_1 konisch. Wir nennen *kon* die konische Unterdistribution von K.

Ist die zentrale nichtholonome Kongruenz k_2 nicht integrierbar, existiert eine einzige 1-dimentionale Unterdistribution $flach \subset K$, deren alle integralen Regelflächen flach sind und deren Erzeugenden in der Hauptebene liegen. Sonst werden alle integralen Regelflächen von k_2 flach. Wir nennen *flach* die flache Unterdistribution von K.

Satz 1.8. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

1) Die Hauptebenen der Geraden $l \in M$ in bezug auf die nichtholonomen Komplexe K und $K_1=I(k_1)$ stimmen überein.

2) Die Sonderdistribution stimmt mit der konischen Distribution $kon \subset K$ überein.

3) Es gilt $K=K_1$.

Satz 1.9. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

1) Die Zentren der Geraden $l \in M$ in bezug auf die nichtholonome Komlexe K und $K_2=I(k_2)$ stimmen überein.

2) Die Sonderdistribution stimmt mit der flachen Distribution $flach \subset K$ überein.

3) Es gilt $K=K_2$.

Es seien Δ_1 und Δ_1^* zwei eindimentionale Distributionen, die einem nichtholonomen Komplex K gehören [10]. Es sei S eine integrale Regelfläche der Distribution Δ_1, die eine Gerade $l \in M$ enthält, und T sei die Tangente der zentralen Kurve[3] auf S im Zentrum Z der Gerade l. Wir nehmen erstmal an, daß S kein Kegel ist (d.h. Δ_1 ist kein konische Distribution), dann ist die Tangente T wohl bestimmt. Es sei S^* die integrale Regelfläche der Distribution Δ_1^*, die diese Tangente T enthält. Wir sagen, daß die Distribution Δ_1 zu der Distribution Δ_1^* in bezug auf K konjugiert ist (oder K-konjugiert) und schreiben $\Delta_1 \to \Delta_1^*$, wenn S eine Torse ist und ihre Tangentialebene mit der Hauptebene übereinstimmt. Wir sagen, daß die konische Distributionen Δ_1 zu jeder Distribu-

---

[2] Die nichtholonome Erweiterung einer Distribution Δ auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine Distribution $I(\Delta)$, die auf die Poisson-Klammer $[X,Y]$ aller Vektorfelder X,Y gespannt ist, die der Distribution Δ gehören [10] (d.h. $X(p), Y(P) \in \Delta(p)$ für $p \in M$).

[3] d.h. die Menge aller zentraler Punkte auf den Geraden der Regelfläche S.

tion Δ_1^* nach der Definition K-konjugiert ist. Wir sagen, daß die Distributionen Δ_1 und Δ_2 gegenseitig K-konjugiert sind, wenn gilt $\Delta_1 \to \Delta_1^*$, $\Delta_1^* \to \Delta_1$.

Die Integritätsbedingungen eines nicht speziellen nichtholonomen Komplexes sind in [9] geometrisch charakterisiert. Der folgende Satz liefert eine geometrische Charakterisation der Integritätsbedingungen eines speziellen nichtholonomen Komplexes.

Satz 1.10. Ein spezieller nichtholonomer Komplex K ist eine integrierbare Distribution auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M dann und nur dann, wenn das K-Konjugiertsein der eindimentionalen Unterdistributionen von K gegenseitig ist (d.h. wenn aus $\Delta_1 \to \Delta_1^*$ folgt $\Delta_1^* \to \Delta_1$).

Es ist leicht zu zeigen, daß die charakteristische Distribution $ch(\Delta)$[4] [12] einer 3-dimentionalen nicht integrierbaren Distribution Δ auf einer 4-dimentionalen Mannigfaltigkeit M eindimensional ist. Wir nennen die integralen Regelfächen der 1-dimensionalen charakteristischen Distribution $ch(K)$ eines nicht integrierbaren speziellen nichtholonomen Komplexes K charakteristische Regelflächen [9].

Satz 1.11. Es seien K ein spezieller nichtholonomer Komplex, k_1 und k_2 seine zentrale und fokale nichtholonome Kongruenzen.

Für jedes beliebige Paar von 1-dimentionalen Unterdistributionen $\Delta_1 \subset k_1$, $\Delta_1^* \subset k2$ gilt $\Delta_1 \to \Delta_1^*$.

Jede beliebige Unterdistribution $\Delta_1 \subset k_2$ ist zu der flachen Unterdistribution $flach \subset K$ K-konjugiert.

Die Charaktereistische Distribution eines nichtholonomen Komplexes K und seine konische Unterdistribution $kon \subset K$ sind gegenseitig K-konjugiert.

1.3. Anwendungen zur Theorie nichtholonomer Kongruenzen. Folgende vier Sätze geben eine Charakterisierung von hyperbolischen und parabolischen nichtholonomen Kongruenzen.

Satz 1.12. Eine nichtholonome Kongruenz ist hyperbolisch dann und nur dann, wenn sie ein Schnitt [10] von zwei speziellen nichtholonomen Komplexen mit unterschiedlichen Zentren und Hauptebenen der Geraden $l \in M$ ist.

Wir sagen, daß ein Brennpunkt F und eine Brennebene Γ in bezug einer hyperbolischen nichtholonomen Kongruenz k einander entsprechen, wenn Γ die Tangentialebene einer Torse von k mit dem Gratpunkt F ist.

Folderung 1.13. Die Angabe einer hyperbolischen nichtholonomen Kongruenz k erzeugt eine Struktur des partiellen Produktes auf der Grass-mann'schen Mannigfaltigkeit, das aus der Distribution k und einer komplementären 2-dimentionalen Distribution k^* besteht, die auch eine hyperbolische nichtholonome Kongruenz mit denselben Brennpunkte und Brennebenen, die in bezug auf k einander entsprechen, in bezug auf k^* nicht einander entsprechen.

Auf diesem Satz und aus dem Satz 1.5 folgt, daß es für die Angabe einer hyperbolischen nichtholonomen Kongruenz genug ist, die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit M

---

[4] Die Distribution $ch(\Delta)$ ist auf die Vektorfelder $X \in \Delta$ gespannt, die folgende Eigenschaft besitzen : $[X,Y] \in \Delta$ für alle $Y \in \Delta$.

mit den glatten Felder von zwei unterschiedlichen Punkten auf den Geraden $l \in M$ und zwei unterschiedlichen Ebenen $\Gamma \supset l$ auszustatten. Mannigfaltigkeit M genau zwei unterschiedliche nichtholonome hyperbolische Kongruenz erzeugt, da es genau zwei Möglichkeit gibt, die zwei Punkten den zwei Ebenen eindeutig zuzuordnen.

Bemerkung. Interpretiert man die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit M als die Plückersche Hyperquadrik Q_4^2 in einem 5-dimensionalen projektiven Raum P^5, dann sind die beiden in der Formulierung des Satzes 1.13 auftretenden Distributionen k und k^* auf $M = Q_4^2$ konjugiert.

Satz 1.14. Für jede beliebige parabolische nichtholonome Kongruenz k existiert ein einziger spezieller nichtholonomer Komplex K, der diese nichtholonome Kongruenz enthält. Die Brennpunkte und Brennebenen der Geraden $l \in M$ für K sind die Zentren und Hauptebenen für K.

Die einzige spezielle nichtholonome Komplex K, der eine parabolische nichtholonome Kongruenz k enthält, nennen wir abgeleiteter von k.

Satz 1.15. Eine nichtspezielle nichtholonome Kongruenz ist parabolisch dann und nur dann, wenn sie ein Schnitt von einem speziellen und einem nicht speziellen nichtholonomen Komplexen K und $\overline{K}$ ist, so daß das Zentrum und die Hauptebene jeder Gerade $l \in M$ in der Hauptkorrelation in bezug auf K zugeordnet sind.

Wir bemerken, daß (wie es aus dem Satz 1.5 folgt) es für die Angabe einer parabolischen nichtholonomen Kongruenz noch nicht genug wäre, die Grassmann'sche Mannigfaltigkeit nur mit den glatten Felder von Punkten und Ebenen auszustatten. Wie es aus dem nachfolgenden Satz 1.16 folgt, ist es im allgemeinen Fall dafür genug, noch ein glattes Feld von Geraden anzugeben, die den angegebenen Ebenen und Punkten inzident sind.

Es ist leicht zu zeigen, daß die einziege durch die Gerade $l \in M$ durchgehende Torse einer parabolischen nichtholonomen Kongruenz k die integrale Regelfläche der Sonderdistribution *sonder(K)* des abgeleiteten Komplexes K ist. Die laufenden 2-Ebene $k(l) \subset T_l M$ aller parabolischen nichtholonomen Kongruenzen k mit einem gemeinsamen abgeleiteten Komplex K gehören zu einem Büschel der 2-Unterräume des 3-Raumes $K(l) \subset T_l M$, die den 1-dimentionalen Unterraum *sonder(K)(l)* enthalten. Genau zwei von diesen Unterräumen stellen die laufenden Ebenen der zentraln und fokalen (speziellen) nichtholonomen Kongruenzen des nichtholonomen Komplexes K dar.

Für jede beliebige nichtholonome Kongruenz $k \supset sonder(K)$ existiert im allgemeinen zwei Richtungsfelder, die zentralen Kurve sind. Das erste Richtungsfeld stimmt mit der Sonderdistribution *sonder(K)*, und das zweite nennen wir asymptotisches für k und bezeichnen *as(k)*. Die entsprechende Tangente der zentralen Kurve einer integralen Regelfläche von *as(K)* nennen wir asymptotische Tangente für k und bezeichnen $T(k)$.

Sei S_l die durch die laufende Gerade $l \in M$ durchgehende charakteristische Regelfläche eines speziellen nichtholonomen Komplexes[5]. Es seien Z und Γ das Zentrum und die Hauptebene der Geraden $l \in M$ in bezug auf K. Wir bezeichnen l_1 die Tangente

[5] die integrale Regelfläche der 1-dimentionalen Diatribution *ch(K)*.

im Punkt Z der zentralen Kurve der Regelfläche S_l, und l_2 bezeichnen wir die Charakteristik der 1-parametrischen Schar der Hauptebenen von Erzeugenden der Regelfläche S_l. Wir nennen eine Gerade s, die dem Zentrum Z und der Hauptebene Γ inzident ist, singulär, wenn sie mit einer der Geraden l_1 und l_2 übereinstimmt. Wir nennen einen speziellen nictholonomen Komplex K ausgeartet, wenn die beiden singulären Geraden l_1 und l_2 für jedes Element $l \in M$ übereinstimmen. Wir nennen eine parabolische nichtholonome Kongruenz k ausgeartet, wenn ihr abgeleiter spezieller nichtholonomer Komplex K ausgeartet ist.

Satz 1.16. Das Entsprechen $k \leftrightarrow T(k)$ zwischen der Menge aller parabolischen nichtholonomen Kongruenz k mit einem gemeinsamen nicht-ausgearteten abgeleiteten spezieller nichtholonomen Komplex K und der Menge aller glatten Felder von nichtsingulären asymptotischen Tangenten $T(k)$ (die den Zentren und Hauptebenen der Geraden $l \in M$ in bezug auf K inzident sind), ist umkehrbar eindeutig.

Bemerkung. Man kann beweisen, daß (im Falle der Integration der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M als die Plücker'sche Hyperquadrik Q_4^2 im Raum P^5) zwei nichtausgeartete parabolische nichtholonome Kongruenzen k und k' dann und nur dann konjugiert sind, wenn sie einem gemeinsamen abgeleiten speziellen nichtholonomen Komlex K besitzen und wenn die Vier, die aus den singulären Geraden l_1 und l_2 und asymptotischen Tangenten $T(k)$ und $T(k')$ besteht, für alle $l \in M$ harmonisch ist.

Literatur

1. *Hoschek J.* Liniengeometrie. Zürich, 1971.

2. *Finikov S.P.* Theorie der Kongruenzen. Berlin, 1959.

3. *Kovanzov N.I.* Theorie der Komplexe. Kiev, 1963.

4. *Spivak M.* A comprechensive introduction to differential geometry. Boston, 1970. Vol.1.

5. *Schouten J.A., van Kampen E.R.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. 1930. № 4-5. S. 752-783.

6. *Wagner V.V.* Differentialgeometrie nichtholonomer Mannigfaltigkeiten // VII Internationaler Lobatschevsky-Wettbewerb (1937). Bericht. Kazan, 1939. S. 195-262.

7. *Kirtschatych L.L., Kaiser V.V.* Zur metrischen Theorie spezieller nichtholonomer Komplexe // Geometrische Sammlung. Tomsk, 1982. № 23. S. 130-132.

8. *Kaiser V.V.* Spezielle nichtholonome Kongruenzen und Komlexe // Geometrische Sammlung. Tomsk, 1984. № 24. S.127-129.

9. *Kaiser V.V.* Nichtholonome geradlinige Geometrie als die Theorie der Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit // Izvestia vysschich utschebnych Zavedenij. Matematika. 1983. № 6. S. 56-58.

10. *Sussmann H.J.* Orbits of families of vektor fields and integrability of distributions // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 180. № 6. P. 171-188.

11. *Chodg W.V., Pedoe D.* Methods of algebraic geometry. Cambridge, 1947. Vol. 1.

12. *Gardner R.B.* Invariants of pfaffian systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 126. № 3. P. 514-533.

13. *Stscherbakov R.N.* Grundlagen der Methoden der äußeren Differentialformen und der geradlinigen Differentialgeometrie. Tomsk, 1973.

В. В. Кайзер

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАССМАНОВОМ МНОГОБРАЗИИ (I)

Многие понятия дифференциальной геометрии прямолинейных конгруэнций и комплексов могут быть распространены на случай неинтегрируемых гладких распределений на грассмановом многообразии всех прямых проективного пространства. Исследуются специальные двумерные и трехмерные распределения, называемые неголономными конгруэнциями и неголономными комплексами. В 1-й части статьи сформулированы результаты.

УДК-514.76

О ПРОДОЛЖЕНИИ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

В.В. Корниевский

(Томский политехнический университет)

Дифференциально-геометрические исследования, проводимые контравариантными методами, широко используют неголономные реперы. Большая же часть исследований в рамках ковариантной методики использует только голономные реперы, т.е. изучает структуры в расслоениях, присоединенных к главным расслоенным пространствам голономных корепеpов. В данной работе предлагается принцип неголономного продолжения гладкого многообразия и вычисления структурных форм расслоений неголономных кореперов.

1. Пусть M - n-мерное гладкое многообразие. Это значит [2, с. 12], что M есть хаусдорфово пространство с фиксированным полным атласом (V_α, h_α), т.е. $V_\alpha \subset M$ покрывают M, а $h_\alpha: V_\alpha \to h_\alpha(V_\alpha) \subset R_n$ - координатные гомеоморфизмы. Ввиду гладкости M, h_α являются диффеоморфизмами. На хаусдорфовом многообразии [3, с.263] не существует диффеенцирований кроме определяемых векторными полями в виде действия линейных дифференциальных операторов этих полей. Если $\overline{X}$ - векторное поле, φ_t - его локальная однопараметрическая группа