The clones of planes in odular nilpotent space are considered. Generally curvature of these surfaces is distinct from zero.

УДК 514.75

Н.А. Елисеева
(Калининградский государственный университет)

ПУЧКИ ПЛОСКОСТЕЙ НОРДЕНА-ТИМОФЕЕВА Н(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрены построения плоскостей Нордена-Тимофеева, ассоциированные с внутренней нормалью 1-го рода Н(П)-распределения [5; 4]. Для оснащающего Н-распределения получены две внутренних нормализации в смысле Нордена-Тимофеева.

Схема использования индексов такова:
$\bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}$; $I, K, L = \overline{1, n}$; $p, q, s = \overline{1, r}$; $i, j, k = \overline{r+1, m}$; $a, b, c = \overline{1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$; $u, v = \overline{r+1, n-1}$; $\sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1}$.

1. **Определение** [1]. Пару распределений

$$\begin{gathered}\Delta\Lambda^{\hat{u}}_{p} \overset{def}{=} \nabla\Lambda^{\hat{u}}_{p} - \Lambda^{\hat{u}}_{q}\Lambda^{\hat{v}}_{p}\omega^{q}_{\hat{v}} + \omega^{\hat{u}}_{p} = \Lambda^{\hat{u}}_{pK}\omega^{K}_{0}, \\ \Delta\mathrm{M}^{\hat{\alpha}}_{a} \overset{def}{=} \nabla\mathrm{M}^{\hat{\alpha}}_{a} - \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}_{b}\mathrm{M}^{\hat{\beta}}_{a}\omega^{b}_{\hat{\beta}} + \omega^{\hat{\alpha}}_{a} = \mathrm{M}^{\hat{\alpha}}_{aK}\omega^{K}_{0}\end{gathered} \tag{1}$$

соответственно r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей M (M-распределение) проективного пространства P_n с отношением инцидентности $\mathrm{A}_0 \in \Lambda \subset \mathrm{M}$ $(r < m < n-1)$ их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем m-полосным распределением П (П-распределением), при этом Λ-распределение назовем базисным, а M-распределение – оснащающим. С регулярным П-распределением в первой дифференциальной окрестности инвариантно ассоциируется поле гиперплоскостей $H_{n-1}(A_0)$ (Н-распределение) [2] таких, что $A_0 \in \Lambda(A_0) \subset \mathrm{M}(A_0) \subset \mathrm{H}(A_0)$. П-распределение, оснащенное полем Н-плоскостей, назовем Н(П)-распределением [1].

В репере 1-го порядка R^1 Н(П)-распределение задается следующими уравнениями (соответствующие замыкания не выписываются) [3]:

$$\omega_p^n = \Lambda_{pK}^n \omega_0^K, \ \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \ \omega_p^\alpha = \Lambda_{pK}^\alpha \omega_0^K, \ \omega_i^n = \Lambda_{i\hat{u}}^n \omega_0^{\hat{u}},$$

$$\omega_i^p = \Lambda_{iK}^p \omega_0^K, \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha K}^p \omega_0^K, \ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K. \quad (2)$$

2. Построение плоскости Нордена-Тимофеева композиции (Λ,Φ).

Фокальное многообразие $\varphi_r^{n-r-1}(N,\Phi)$ в нормали 1-го рода $N_{r+1}(A_0) = [\Lambda, \lambda_1]$ элемента Ф-распределения (Ф-распределение – распределение плоскостей Φ_{n-r-1}, где $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ – характеристика гиперплоскости $H_{n-1}(A_0)$, полученная при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению [3]) задается уравнениями

$$x^v - v_n^v x^n = 0, \ \det\left\| \delta_u^v x^0 + \left(\Lambda_{pu}^v - \Lambda_{pu}^n v_n^v\right) x^p + \left(v_{nu}^v - \Lambda_{wu}^n v_n^w v_n^v\right) x_n \right\| = 0. \quad (3)$$

Линейная поляра φ_r центра A_0 относительно фокального многообразия $\varphi_r^{n-r-1}(N,\Phi)$ (3) определяется уравнениями

$$x^v - v_n^v x^n = 0, \ x^0 - \sigma_p^0 x^p - \sigma_n^0 x^n = 0, \quad (4)$$

где $\sigma_p^0 = -\dfrac{1}{n-r-1}\left(\Lambda_{pv}^v - \Lambda_{pv}^n v_n^v\right), \ \nabla\sigma_p^0 + \omega_p^0 = \sigma_{pK}^0 \omega_0^K$;

$$\sigma_n^0 = -\frac{1}{n-r-1}\left(v_{nv}^v - \Lambda_{uv}^n v_n^u v_n^v\right), \ \nabla\sigma_n^0 + v_n^u \omega_u^0 + \sigma_p^0 \omega_n^p + \omega_n^0 = \sigma_{nK}^0 \omega_0^K.$$

Плоскость $\varphi_r(A_0)$ (4) пересекает плоскость $\Lambda(A_0)$ по плоскости $\varphi_{r-1}(A_0)$:

$$x^n = 0, \quad x^v = 0, \quad x^0 - \sigma_p^0 x^p = 0, \quad (5)$$

которая является нормалью 2-го рода в смысле Нордена элемента Λ-распределения.

Рассмотрим плоскость $\boldsymbol{p}_{n-2}(A_0) = \left[k_{n-r-2}(A_0), \varphi_{r-1}(A_0)\right]$, натянутую на плоскости $\varphi_{r-1}(A_0)$ (6) и $k_{n-r-2}(A_0)$, где $k_{n-r-2}(A_0)$ – ось

Картана Λ-распределения [3]: $x^p = 0$, $x^n = 0$, $x^0 - \lambda_u^0 x^u = 0$, где $\lambda_u^0 = -\frac{1}{r}\Lambda_{up}^p$, $\nabla\lambda_u^0 + \omega_u^0 = \lambda_{uK}^0 \omega_0^K$. Плоскость $\boldsymbol{p}_{n\text{-}2}\left(A_0\right)$:

$$x^n = 0\,,\; x^0 - \boldsymbol{p}_\sigma^0 x^\sigma = 0\,, \tag{6}$$

(6)

где $\boldsymbol{p}_p^0 = \sigma_p^0$, $\boldsymbol{p}_u^0 = \lambda_u^0$, $\nabla\boldsymbol{p}_\sigma^0 + \omega_\sigma^0 = \boldsymbol{p}_{\sigma K}^0 \omega_0^K$, является плоскостью Нордена-Тимофеева [5] композиции $\left(\Lambda, \Phi\right)$.

3. Нормализация $\left(P_n{}^\sigma, \boldsymbol{p}_\sigma^0\right)$ Нордена-Тимофеева Н-распределения.

Сущность соответствия Бомпьяни-Пантази для распределения гиперплоскостных элементов [6; 7] состоит в том, что нормаль 2-го рода, соответствующая в проективитете Бомпьяни-Пантази некоторой нормали 1-го рода, является характеристикой элемента при смещении центра по кривым, принадлежащим распределению этих нормалей 1-го рода.

Пусть плоскость Нордена-Тимофеева $\boldsymbol{p}\left(A_0\right)$ (6), определенная объектом $\left\{\boldsymbol{p}_\sigma^0\right\}$ [6], является характеристикой гиперплоскости $\mathrm{H}\left(A_0\right)$ при смещении центра A_0 по кривым, принадлежащим распределению нормалей 1-го рода $P\left(A_0\right)$ Н-распределения, определяемых некоторым геометрическим объектом $\left\{P_n{}^\sigma\right\}$. Построим охват объекта $\left\{P_n{}^\sigma\right\}$. Предварительно найдем уравнения, определяющие характеристику гиперплоскости $\mathrm{H}\left(A_0\right)$ в репере R^1 при смещении центра A_0 по кривым p: $\omega_0^\sigma = P_n{}^\sigma \theta_0^n$, $\omega_0^n = \mu^n\theta$, $d\theta = \theta\wedge\theta_0^0$, принадлежащим распределению нормалей $P\left(A_0\right)$. В результате получим

$$x^0 + \left(\Lambda_{\sigma n}^n + S_{\sigma\rho}^n P_n{}^\rho\right) x^\sigma = 0\,, \tag{7}$$

где $S_{\sigma\rho}^n = \left\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{\alpha\beta}^n, \Lambda_{pq}^n\right\}$; $\nabla S_{\sigma\rho}^n = S_{\sigma\rho K}^n \omega_0^K$ [3]; $\nabla\Lambda_{\sigma n}^n = \Lambda_{\sigma\tau}^n \omega_n^\tau + \omega_\sigma^0 + \Lambda_{\sigma nK}^n \omega_0^K$.

Плоскость (7) совпадает с плоскостью Нордена-Тимофеева $\boldsymbol{p}\left(A_0\right)$ (6) тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\boldsymbol{p}_\sigma^0 = -\left(\Lambda_{\sigma n}^n + S_{\sigma\rho}^n P_n{}^\rho\right). \tag{8}$$

В общем случае выполняется [3] соотношение $S=\det\left\|S^{n}_{\sigma\rho}\right\|\neq 0$, что позволяет ввести в рассмотрение обращенный тензор $S^{\sigma\tau}_{n}$, удовлетворяющий уравнениям

$$\nabla S^{\rho\tau}_{n}=S^{\rho\tau}_{nK}\omega^{K}_{0}$$

и конечным соотношениям

$$S^{n}_{\sigma\rho}S^{\rho\tau}_{n}=\delta^{\tau}_{\sigma},\ S^{n}_{\sigma\rho}S^{\tau\sigma}_{n}=\delta^{\tau}_{\rho}.$$

Свернув уравнения (8) с тензором $S^{\sigma\tau}_{n}$, получим

$$P_{n}{}^{\sigma}=-S^{\sigma\tau}_{n}\left(\boldsymbol{p}^{0}_{\tau}+\Lambda^{n}_{\tau n}\right),\ \nabla P_{n}{}^{\sigma}+\omega^{\sigma}_{n}=P_{nK}{}^{\sigma}\omega^{K}_{0}\,. \tag{9}$$

Итак, $(n-2)-$ мерные плоскости (7) и $\boldsymbol{p}\left(A_0\right)$ (6) совпадают тогда и только тогда, когда имеет место формула (9) охвата объекта $\left\{P_{n}{}^{\sigma}\right\}$. Отсюда следует, что поле геометрического объекта $\left\{P_{n}{}^{\sigma}\right\}$, заданное уравнениями (9), определяет поле нормалей 1-го рода Н-распределения. Таким образом, для оснащающего Н-распределения построена нормализация в смысле Нордена-Тимофеева $\left(P_{n}{}^{\sigma},\boldsymbol{p}^{0}_{\sigma}\right)$, т.е. построены поля внутренних нормалей 1-го рода $\left(P_{n}{}^{\sigma}\right)$ и 2-го рода $\left(\boldsymbol{p}^{0}_{\sigma}\right)$ Н-распределения, удовлетворяющие соответствию Бомпьяни-Пантази [7; 6]:

$$\nu^{0}_{\sigma}=-\left(\Lambda^{n}_{\sigma n}+S^{n}_{\sigma\rho}\nu^{\rho}_{n}\right). \tag{10}$$

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности порядка t (t – порядок охвата внутренней нормали* $\left\{\nu^{\sigma}_{n}\right\}$ *1-го рода* Н(П)*-распределения) к оснащающему* Н(П)*-распределению присоединяется его нормализация* $\left(P_{n}{}^{\sigma},\boldsymbol{p}^{0}_{\sigma}\right)$ *в смысле Нордена-Тимофеева.*

4. Нормализация $(G^{\sigma}_{n},g^{0}_{\sigma})$ Нордена-Тимофеева Н-распределения.

Аналогично п. 2 фокальное многообразие $\rho^{m}_{n-m-1}\left(A_0\right)$ в нормали 1-го рода $N_{n-m}\left(A_0\right)$ элемента М-распределения задается уравнениями

$$x^{a}-\nu^{a}_{n}x^{n}=0,\ \det\left\|x^{0}\delta^{a}_{b}+\left(\Lambda^{a}_{\alpha b}-\Lambda^{n}_{\alpha b}\nu^{a}_{n}\right)x^{\alpha}+\left(\nu^{a}_{nb}-\Lambda^{n}_{cb}\nu^{c}_{n}\nu^{a}_{n}\right)x^{n}\right\|=0\,. \tag{11}$$

Линейная поляра $\rho_{n-m-1}(A_0)$ центра A_0 относительно фокального многообразия (11) имеет вид:

$$x^a - \nu_n^a x^n = 0\,,\ x^0 - \rho_\alpha^0 x^\alpha - \rho_n^0 x^n = 0\,, \tag{12}$$

где $\rho_\alpha^0 = -\dfrac{1}{m}\left(\Lambda_{\alpha a}^a - \Lambda_{\alpha a}^n \nu_n^a\right)$, $\nabla\rho_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \rho_{\alpha K}^0 \omega_0^K$,

$$\rho_n^0 = -\frac{1}{m}\left(\nu_{na}^a - \Lambda_{ba}^n \nu_n^b \nu_n^a\right),\ \nabla\rho_n^0 + \nu_n^a\omega_a^0 + \rho_\alpha^0\omega_n^\alpha + \omega_n^0 = \rho_{nK}^0\omega_0^K\,.$$

Плоскость $\rho_{n-m-1}(A_0)$ (12) пересекает характеристику $\mathrm{E}_{n-m-1}(A_0)$, полученную при смещении центра A_0 вдоль интегральных кривых М-распределения [3], по плоскости $\rho_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^n = 0,\quad x^a = 0,\ \ x^0 - \rho_\alpha^0 x^\alpha = 0\,, \tag{13}$$

которая является нормалью 2-го рода Е-распределения.

Ось Картана $S_{m-1}(A_0)$ для Е-распределения [3] задается уравнениями

$$x^{\hat\alpha} = 0\,,\ x^0 - \varepsilon_a^0 x^a = 0\,, \tag{14}$$

где $\varepsilon_a^0 = -\dfrac{1}{n-m-1}\left(\Lambda_{\alpha\alpha}^\alpha - \nu_n^\alpha\Lambda_{a\alpha}^n\right)$, $\nabla\varepsilon_a^0 + \omega_a^0 = \varepsilon_{aK}^0\omega_0^K$.

Плоскость $\boldsymbol{g}_{n\text{-}2}(A_0) = \left[\rho_{n-m-2}(A_0), S_{m-1}(A_0)\right]$, натянутую на плоскости $\rho_{n-m-2}(A_0)$ (13) и $S_{m-1}(A_0)$ (14), назовем плоскостью Нордена-Тимофеева композиции (M,E) [5; 4], которая задается уравнениями

$$x^n = 0,\ \ x^0 - \boldsymbol{g}_\sigma^0 x^\sigma = 0\,, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{g}_\alpha^0 = \rho_\alpha^0$, $\boldsymbol{g}_a^0 = \varepsilon_a^0$, $\nabla\boldsymbol{g}_\sigma^0 + \omega_\sigma^0 = \boldsymbol{g}_{\sigma K}^0\omega_0^K$.

В проективитете Бомпьяни-Пантази [6; 7], заданном соотношениями (10), нормали 2-го рода $\boldsymbol{g}_{n\text{-}2}(A_0)$ Н-распределения соответствует его нормаль 1-го рода $\left\{G_n^\sigma\right\}$, где

$$G_n^\sigma = -S_n^{\sigma\tau}\left(\boldsymbol{g}_\tau^0 + \Lambda_{\tau n}^n\right),\ \nabla G_n^\sigma + \omega_n^\sigma = G_{nK}^\sigma\omega_0^K\,. \tag{16}$$

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности порядка t (t – порядок внутренней нормали* $\{\nu_n^\sigma\}$ *1-го рода* H/П)*-распределения) к оснащающему Н-распределению присоединяется его нормализация* $\left(G_n^\sigma, \boldsymbol{g}_\sigma^0\right)$ *в смысле Нордена-Тимофеева.*

По своей структуре построения квазитензоры $\{\boldsymbol{p}_\sigma^0\}$ и $\{\boldsymbol{g}_\sigma^0\}$ функционально независимы, что позволяет ввести в рассмотрение (в общем случае нетривиальный) абсолютный тензор $\{L_\sigma^0\}$: $L_\sigma^0 = \boldsymbol{p}_\sigma^0 - \boldsymbol{g}_\sigma^0$, $\nabla L_\sigma^0 = L_{\sigma K}^0 \omega_0^K$. Отсюда следует, что в плоскости $\mathrm{H}(A_0)$ можно построить однопараметрический пучок $U(\varepsilon)$ плоскостей Нордена-Тимофеева – пучок инвариантных нормалей 2-го рода плоскости $\mathrm{H}(A_0)$, который задается уравнениями

$$U(\varepsilon) = \boldsymbol{g}_\sigma^0 + \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_\sigma^0 - \boldsymbol{g}_\sigma^0\right) = \boldsymbol{g}_\sigma^0 + \varepsilon \cdot L_\sigma^0. \tag{17}$$

Теорема 3. *Поля объектов* $\{\boldsymbol{p}_\sigma^0\}$ *и* $\{\boldsymbol{g}_\sigma^0\}$ *определяют в дифференциальной окрестности порядка* $t \geq 2$ (t *- порядок внутренней нормали* $\{\nu_n^\sigma\}$ *1-го рода Н-распределения) поле пучков* $U(\varepsilon)$ *(17) плоскостей Нордена-Тимофеева – поле пучков нормалей 2-го рода, оснащающего Н-распределения.*

Так как поля объектов $\{\nu_n^\sigma\}$, $\{P_n{}^\sigma\}$, $\{G_n^\sigma\}$ функционально независимы (по структуре построения), то справедлива

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности порядка* $t \geq 2$ (t *- порядок внутренней нормали* $\{\nu_n^\sigma\}$ H/П)*-распределения) внутренним образом присоединяются три однопараметрических пучка* $\left(\nu_n^\sigma, P_n{}^\sigma\right)$, $\left(\nu_n^\sigma, G_n^\sigma\right)$, $\left(P_n{}^\sigma, G_n^\sigma\right)$ *нормалей 1-го рода* H/П)*-распределения, ассоциированных с нормалью* $\{\nu_n^\sigma\}$*, где* $\{P_n{}^\sigma\}$ *(9) и* $\{G_n^\sigma\}$ *(16) – одномерные нормали 1-го рода Н-распределения, соответствующие в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази (10) плоскостям Нордена-Тимофеева* $\boldsymbol{p}$ *(6) и* $\boldsymbol{g}$ *(15).*

Любая нормаль, принадлежащая одному из пучков $\left(\nu_n^\sigma, P_n{}^\sigma\right)$, $\left(\nu_n^\sigma, G_n^\sigma\right)$, $\left(P_n{}^\sigma, G_n^\sigma\right)$, вместе с нормалью 1-го рода $\Phi(A_0)$ порождает

[4] двойственную нормализацию базисного Λ-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна. Таким образом, имеет место

Теорема 5. *С каждой внутренней нормалью* $\{\nu_n^\sigma\}$ *1-го рода* $H(\Pi)$*-распределения порядка* t $(t \geq 2)$ *внутренним образом присоединяются к* Λ*-распределению три однопараметрических пучка двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна [8; 9] с общей осью – плоскостью* $\Phi_{n-r-1}(A_0)$.

Аналогично, доказана

Теорема 16. *С каждой внутренней нормалью 1-го рода* $\{\nu_n^\sigma\}$ $H(\Pi)$*-распределения порядка* $t \geq 2$ *в дифференциальной окрестности того же порядка* $t \geq 2$ *внутренним образом присоединяются к М-распределению три однопараметрических пучка его двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна [8; 9] с общей осью – плоскостью* $E_{n-m-1}(A_0)$.

Список литературы

1. *Елисеева Н.А.* Полосные распределения проективного пространства // Тр. IX Межд. конф. женщин-математиков. Н. Новгород, 2001. Т. 9. Вып. 1. С. 49 – 54.

2. *Шейдорова Н.М.* Поле гиперплоскостей, ассоциированное с М(Λ)-распределением проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 103 – 105.

3. *Елисеева Н.А.* $H(\Pi)$-распределения проективного пространства. Деп. в ВИНИТИ РАН. 01.02.2002. № 206-В2002.

4. *Попов Ю.И.* Инвариантные подпространства, ассоциированные с $H(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. II. Деп. в ВИНИТИ. 02.07.84. № 4481 – 84.

5. *Норден А.П., Тимофеев Г.Н.* Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. вузов. Мат. 1972. № 8(123). С. 81 – 89.

6. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71 – 120.

7. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Там же. 1971. Т. 3. С. 49 – 94.

8. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.

9. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т. 28. № 4. С. 151 – 157.

N. Eliseeva

BUNCHES OF PLANES OF THE NORDEN-TIMOFEEV OF THE H(Л)-DISTRIBUTION

The constructions of planes of the Norden-Timofeev, associate with an internal normal of 1-st kind of H(Л)-distribution are considered. For equipping H-distribution two internal normalizations in sense of the Norden-Timofeev are obtained.

УДК 514.75

О.М. Жовтенко
(Калининградский государственный университет)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СВЯЗНОСТИ, АССОЦИИРОВАННОЙ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ПЛОСКОСТЕЙ

Продолжено исследование групповой связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией плоскостей [1]. Дана геометрическая характеристика подобъектов этой связности посредством центрального проектирования и параллельных перенесений.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрено (n-m)-мерное семейство m-мерных плоскостей L_m – конгруэнция плоскостей B_{n-m} [2]. Произведена специализация подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, при которой вершины A, A_a помещены на плоскость L_m. Система уравнений конгруэнции B_{n-m} в специализированном репере имеет вид:

$$\omega_a^\alpha = \Lambda_{a\beta}^\alpha \omega^\beta \quad (a, b = \overline{1, m}\,;\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}\,).$$

С конгруэнцией B_{n-m} ассоциируется главное расслоение $G_s(B_{n-m})$, базой которого является конгруэнция B_{n-m}, а типовым слоем – s-членная подгруппа стационарности $G_s \subset GP(n)$ $(s = n^2 - nm + m^2 + n + m)$ плоскости L_m, причем проективная группа GP(n) действует в пространстве P_n. Ассоциированное расслоение $G_s(B_{n-m})$ содержит подрасслоение проективных реперов с той же базой, типовым слоем которого является действующая на плоскости L_m проективная фактор-группа GP(m) группы G_s.