1. *Степанов Н. В.* Геометрия дифференциальных уравнений // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1981. Т.12. С.127-165.

2. *Банару Г.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий // Вестн. МГУ. Сер.1. Мат. Мех. 1994. С.31-36.

3. *Banaru G.A.* Third-order ordinary differential equations and $g_{4,2}$-connection // Webs & Quasigroups. Tver, 1995. P.84-88.

G.A. B a n a r u

ON THE CONDITION IMPOSED ON EQUATION $y'''=f(x.y,y',y'')$, PERMITTING CONNECTION WITH 5-DIMENTIONAL FUNDAMENTAL GROUP

Necessary condition is found, that ordinary differential equation of 3-nd order should admit addition to itself connection with 5-dimensional fundamental group.

УДК 514.763.8

М.Б. Б а н а р у

(Смоленский гуманитарный университет)

О 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Одним из наиболее красивых и содержательных примеров эрмитовых многообразий являются 6-мерные ориентируемые подмногообразия алгебры октав. Приводится ряд результатов о свойствах таких многообразий.

Напомним, что эрмитовым называется многообразие M^{2n}, наделенное почти комплексной структурой J и римановой метрикой $g=\langle.,.\rangle$ при выполнении условий:

$$\langle JX,JY\rangle=\langle X,Y\rangle\ ,\ X,Y\in\mathfrak{X}(M);\ [X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]=0$$

1. Как известно, тензором Риччи ric риманова многообразия называется тензор, компоненты которого связаны с компонентами тензора римановой кривизны (тензора Римана-Кристофеля) следующим образом [1]:

$$ric_{ij}=R^{k}_{ijk}\ .$$

Этот тензор симметричен; значение соответствующей квадратичной формы на векторе X, $X\in\mathfrak{X}(M)$ называется кривизной Риччи и обозначается S(X).Таким образом,

$$S(X)=ric_{ij}X^iX^j,\quad \|X\|=1.$$

Воспользуемся значениями спектра тензора римановой кривизны 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав [2]

$$R_{abcd}=R_{\hat{a}bcd}=R_{\hat{a}\hat{b}cd}=0,\quad R_{\hat{a}b\hat{c}d}=-\sum_{\varphi}T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}T^{\varphi}_{bd},\tag{1}$$

где T^{φ}_{ij}-компоненты конфигурационного тензора (или, иначе, тензора эйлеровой кривизны). Здесь a,b,c,d=1,2,3; $\hat{a}=a+3;\ \varphi=7{,}8$.

Вычислим спектр тензора Риччи для 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли. С учетом (1) получаем:

$$ric_{ab}=R^{c}_{abc}+R^{\hat{c}}_{ab\hat{c}}=R_{\tilde{n}abc}+R_{cab\hat{c}}=0,$$

$$ric_{\hat{a}b}=R^{c}_{\hat{a}bc}+R^{\hat{c}}_{\hat{a}b\hat{c}}=R_{\tilde{n}abc}+R_{c\hat{a}b\hat{c}}=R_{c\hat{a}b\hat{c}}=R_{\hat{a}c\hat{c}b}=-\sum_{\varphi}T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}T^{\varphi}_{cb};$$

$$ric_{a\hat{b}}=R^{c}_{a\hat{b}c}+R^{\hat{c}}_{a\hat{b}\hat{c}}=R_{\tilde{n}a\hat{b}c}+R_{ca\hat{b}\hat{c}}=R_{\tilde{n}a\hat{b}c}=-\sum_{\varphi}T^{\varphi}_{\tilde{n}\hat{b}}T^{\varphi}_{ac};$$

$$ric_{\hat{a}\hat{b}}=R^{c}_{\hat{a}\hat{b}c}+R^{\hat{c}}_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}=R_{\tilde{n}\hat{a}\hat{b}c}+R_{c\hat{a}\hat{b}\hat{c}}=0.$$

Ввиду вещественности тензора Риччи,

$$ric_{ab}=\overline{ric}_{\hat{a}\hat{b}},\ ric_{\hat{a}b}=\overline{ric}_{a\hat{b}}.$$

Следовательно, спектр тензора Риччи определяется так:

$$ric_{ab}=0,\ ric_{\hat{a}b}=-\sum_{\varphi}T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}T^{\varphi}_{bc}.\tag{2}$$

Тогда кривизна Риччи эрмитова подмногообразия алгебры октав вычисляется следующим образом :

$$S(X)=-2\sum_{\varphi}T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}T^{\varphi}_{bc}X^bX_a=-2\sum_{\varphi}(T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}X_a)(T^{\varphi}_{bc}X^b)=$$

$$=-2\sum_{\varphi}(T^{\varphi}_{ab}X^b)(\overline{T^{\varphi}_{ab}X^b})=-2\sum_{\varphi,a}\left|T^{\varphi}_{ab}X^b\right|^2\le 0.$$

Теорема 1. *6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли имеет неположительную кривизну Риччи, причем эта кривизна обращается в нуль в геодезических точках и только в них.*

Следствие. *6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является Риччи-плоским тогда и только тогда, когда оно - область на келеровой плоскости.*

Вычислим скалярную кривизну 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав . С учетом (2) получаем:

$$K=ric^{i}_{i}=-2\sum_{\varphi}\left|T^{\varphi}_{ab}\right|^2\le 0.$$

Как видно, скалярная кривизна 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли также неположительна и обращается в нуль исключительно в геодезических точках. В этом смысле скалярная кривизна ‘повторяет’ и кривизну Риччи, и голоморфную бисекционную кривизну [3] таких многообразий.

Если же рассматриваемое многообразие является многообразием постоянной скалярной кривизны (K=const), то мы получаем, что

$$\sum_{\varphi}\left|T^{\varphi}_{ab}\right|^{2}=\text{const},$$

и следовательно, справедлива

Теорема 2. *6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли является многообразием постоянной скалярной кривизны в том и только том случае, когда конфигурационный тензор имеет постоянную длину .*

Отметим, что обе теоремы обобщают известные результаты В.Ф. Кириченко [4], полученные для 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав.

Библиографический список

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.

2. *Банару М.Б.* О паракелеровости 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1994. Вып. 25. С.15-18.

3. *Банару М.Б.* О голоморфной бисекционной кривизне 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Там же. 1997. Вып. 28. С. 7-9.

4. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 1980. №8. С.32-38.

M.B. B a n a r u

ON 6-DIMENSIONAL HERMITEAN SUBMANIFOLDS
OF CAYLEY ALGEBRA

One of most beautiful and substantial examples hermitean manifolds is 6-dimensional submanifolds of oktave algebra. Some results about properties such manifolds are adduced.

УДК 514.75

О.О. Б е л о в а

(Калининградский государственный университет)

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ГРАССМАНА