Список литературы

1. *Монахова О.А.* О некоторых лифтах на тензорном расслоении типа (0, 2) // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 5: Актуальные проблемы математики и механики: мат-лы Междунар. науч. конф. Казань, 2000. С. 153.
2. *Монахова О.А.* Горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров // Диф. геом. многообр. фигур: межвуз. темат. сб. науч. тр. Вып. 36. Калининград, 2005. С. 88—92.

O. Monakhova

ABOUT THE STRUCTURE GROUP ON THE BUNDLE OF THE TENSORS OF THE TYPE (0,2)

The action of complete linear group on the bundle of the tensors of the type (0,2) is described. Some identities which operators of the action group satisfy are proved.

УДК 514.76

Н.Д. Никитин

(Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского)

ОБ АЛГЕБРЕ ЛИ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С (n–1)-МЕРНЫМИ ОРБИТАМИ, ОСТАВЛЯЮЩЕЙ ИНВАРИАНТНОЙ НЕЛИНЕЙНУЮ СВЯЗНОСТЬ

Показано, что максимальная размерность алгебры Ли абелевой группы преобразований с (n-1)-мерными орбитами, оставляющей инвариантной нелинейную связность, равна $2n$–2.

***Ключевые слова*:** алгебра Ли, абелева группа преобразований, нелинейная связность.

Пусть M — n-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — касательное расслоение, π: $T(M) \to M$ — каноническая проекция, $G=R\setminus\{0\}$ — группа Ли относительно операции умножения, действующая на касательном расслоении по закону: для любого $a\in G$ преобразование $R_a:T(M)\to T(M)$ отображает произвольный элемент $z\in T(M)$ в $R_a(z)=az$, где $z=(x,\bar{b})$, $az=(x,a\bar{b})$, $\bar{b}\in T_x$. Обозначим через $T'(M)$ подрасслоение $T(M)$, состоящее из всех ненулевых векторов, касательных к M.

Определение. *Дифференцируемое распределение H, заданное на T'(M) и удовлетворяющее для любого* $z\in T'(M)$ *и* $a\in G$ *условиям* [1]:

$$a)\, T_z=H_z\oplus Q_z\,,\quad b)\, dR_a(H_z)=H_{R_a(z)}\,,$$

где Q_z — касательное векторное пространство к слою $F'_p=\pi^{-1}(p)$, $p=\pi(z)$, называется нелинейной связностью $\overline{\nabla}$ на многообразии М.

Пусть (U,x^i), $i=\overline{1,n}$ — локальная карта многообразия M. Нелинейная связность $\overline{\nabla}$ в естественных координатах (x^i,y^j), $i,j=\overline{1,n}$, окрестности $\pi^{-1}(U)$ имеет компоненты $H_i^h(x^1,x^2,\ldots,x^n,y^1,y^2,\ldots,y^n)$, $i,h=\overline{1,n}$, однородные первой степени относительно слоевых координат $y^1,y^2,\ldots,y^n$. Обозначим через L_r алгебру Ли эффективной группы преобразований G_r, оставляющей инвариантной нелинейную связность $\overline{\nabla}$. Для каждого $X\in L_r$: $L_{X^c}\overline{\nabla}=0$, где L_{X^c} — обозначение производной Ли относительно полного лифта X^c векторного поля X.

Условие инвариантности нелинейной связности $\overline{\nabla}$ относительно производной Ли вдоль векторного поля X^c, $X\in L_r$, подробно запишется:

$$\partial^2_{\sigma i}\xi^h y^\sigma-\partial_\sigma\xi^h H_i^\sigma+H^h_{i\cdot\sigma}\partial_m\xi^\sigma y^m+\xi^\sigma\partial_\sigma H_i^h=0. \qquad (1)$$

В (1) $H^h_{i\cdot\sigma}=\dfrac{\partial H_i^h}{\partial y^\sigma}$, ξ^h — компоненты векторного поля X.

Теорема. *Максимальная размерность алгебры Ли абелевой группы преобразований с (n–1)-мерными орбитами, оставляющей инвариантной нелинейную связность* $\overline{\nabla}$, *равна* $2n-2$.

Доказательство. Предположим, что нелинейная связность $\overline{\nabla}$ является инвариантной относительно абелевой группы G_r $(r \geq 2n-1)$ с (n–1)-мерными орбитами и инфинитезимальные преобразования $X_\beta = \xi^i_\beta \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $(\beta = 1,2,\ldots,r;\ r \geq 2n-1,\ rang\left\|\xi^i_\beta\right\| = n-1)$ — базис алгебры Ли L_r этой группы. Можно всегда предположить, что $rang\left\|\xi^i_\alpha\right\| = n-1$ $\left(\alpha = \overline{1, n-1}\right)$. Существует система координат $\left(U, x^i\right)$, в которой векторные поля X_β имеют вид:

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha};\ X_{n-1+\lambda} = b^\alpha_\lambda\left(x^n\right)\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \left(\lambda = 1,2,\ldots,r-n+1\right).$$

Пусть $H^i_j = y^n \varphi^i_j\left(x^1, x^2, \ldots, x^n; u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}\right)$, где $u^l = \dfrac{y^l}{y^n}$ $\left(l = \overline{1, n-1}\right)$ — компоненты нелинейной связности $\overline{\nabla}$ в естественных координатах $\left(x^1, x^2, \ldots, x^n, y^1, y^2, \ldots, y^n\right)$ окрестности $\pi^{-1}(U)$. Тогда уравнения инвариантности нелинейной связности $\overline{\nabla}$ относительно группы G_r будут следующими:

$$\begin{cases} b^{\alpha''}_\lambda \delta^n_k - b^{\alpha'}_\lambda \phi^n_k + \phi^\alpha_{k\cdot\sigma} b^{\sigma'}_\lambda + \delta^n_k \phi^\alpha_\sigma b^{\sigma'}_\lambda = 0, \\ \phi^n_{k\cdot\sigma} b^{\sigma'}_\lambda + \delta^n_k \phi^n_\sigma b^{\sigma'}_\lambda = 0,\ \dfrac{\partial \phi^s_k}{\partial x^\alpha} \neq 0, \\ \left(k, s = \overline{1..,n};\ \alpha, \sigma = \overline{1, n-1};\ \lambda = \overline{1, r-n+1}\right), \end{cases} \tag{2}$$

где $b^{\alpha'}_\lambda = \dfrac{db^\alpha_\lambda}{dx^n}$, $b^{\alpha''}_\lambda = \dfrac{d^2 b^\alpha_\lambda}{(dx^n)^2}$, $\varphi^\alpha_{k\cdot\sigma} = \dfrac{\partial \varphi^\alpha_k}{\partial u^\sigma}$.

Исследуем систему уравнений (2). Для этого рассмотрим матрицу $\left\|b^{\alpha'}_\lambda\right\|$. Пусть $rang\left\|b^{\alpha'}_\lambda\right\| = q,\ q \leq n-1$. Можно всегда положить, что $rang\left\|b_t^{\alpha'}\right\| = q\ \ (t = 1,2,\ldots,q)$. Тогда μ-я строка матрицы $\left\|b_\mu^{\alpha'}\right\|\ \ (\mu > q)$ является линейной комбинацией с функциональными коэффициентами первых q строк, то есть

$$b_\mu^{\alpha'}(x^n) = \eta_\mu^t(x^n)\cdot b_t^{\alpha'}(x^n). \tag{3}$$

Из системы уравнений (2) следует, что

$$b_\mu^{\alpha''}(x^n) = \eta_\mu^t(x^n)\cdot b_t^{\alpha''}(x^n). \tag{4}$$

Продифференцировав соотношение (3) по x^n и учитывая (4), получим

$$\eta_\mu^{t'}(x^n)\cdot b_t^{\alpha'}(x^n) = 0\ . \tag{5}$$

Так как $rang\left\|b_t^{\alpha'}\right\| = q\ \ (t = 1,2,\ldots,q)$, то соотношения (5) имеют место тогда и только тогда, когда $\eta_\mu^{t'} = 0$. Значит, $\eta_\mu^t \in R$. Тогда из (3) получим $b_\mu^\alpha(x^n) = \eta_\mu^t\cdot b_t^\alpha + c_\mu^\alpha$. Отсюда следует, что инфинитезимальные преобразования $X_\mu, X_\alpha\ \left(\alpha = \overline{1,n-1}\right)$, $X_{n-1+t}\ \left(t = \overline{1,q}\right)$, входящие в базис алгебры Ли L_r группы $G_r\ \ (r \geq 2n-1)$, оставляющей инвариантной нелинейную связность $\overline{\nabla}$, являются линейно зависимыми. Пришли к противоречию — значит, не существует абелевых групп преобразований $G_r\ \ (r \geq 2n-1)$ с (n-1)-мерными орбитами, оставляющих инвариантной нелинейную связность $\overline{\nabla}$.

С другой стороны, группа преобразований G_{2n-2}, базисом алгебры Ли которой являются инфинитезимальные преобразования

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, X_{n-1+\lambda} = a_\lambda^\alpha(x^n)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ \left(\alpha, \lambda = \overline{1,n-1}\right),$$

$rang\left(a_\lambda^{\alpha'}(x^n)\right) = n-1$, оставляет инвариантной нелинейную связность $\overline{\nabla}$ с компонентами

$$H_\beta^\alpha = y^\alpha b_\beta^n(x^n) + y^n\Theta_\beta^\alpha(x^n),\ H_n^n = -y^\sigma b_\sigma^n(x^n) + b(x^n)y^n,$$

$$H_n^\alpha = -y^\alpha b_\sigma^n(x^n)\frac{y^\sigma}{y^n} - (a_\rho^{\alpha''}(x^n)\tilde{a}_\sigma^\rho(x^n) + \Theta_\sigma^\alpha(x^n))y^\sigma +$$

$$+ b_n(x^n)y^\alpha + \gamma_n^\alpha(x^n)y^n, \ H_\beta^n = y^n b_\beta^n(x^n),$$

где $\left\|\tilde{a}_\sigma^\rho(x^n)\right\|$ — матрица, обратная матрице $\left\|a_\rho^{\alpha'}\right\|$ $(\alpha,\beta,\sigma,\rho=\overline{1,n-1})$.

Список литературы

1. *Yano K., Isihara S.* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. New York, 1973.

N. Nikitin

ON LIE ALGEBRA OF ABEL'S GROUP OF TRANSFORMATIONS WITH (n–1)-DIMENSIONAL ORBITS WHICH KEEPS INVARIANT OF NON-LINEAR CONNECTION

It is shown that maximal dimension of Lie algebra of Abel's group of transformations with (n–1)-dimensional orbits which keeps invariant of non-linear connection is equal to $2n–2$.

УДК 514.75

О. М. Омельян

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

О ВНУТРЕННИХ КРИВИЗНАХ 1-го И 2-го ТИПОВ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Произведено внутреннее композиционное оснащение этого распределения. Доказано, что это оснащение индуцирует в главном расслоении внутренние кривизны 1-го и 2-го типов.

Ключевые слова: распределение плоскостей, главное расслоение, оснащение, инвариант, связность, тензор кривизны.